

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE CHIMIQUE

DYNAMIQUE DE PARTICULES EN MILIEU NON-NEWTONIEN

Thèse de doctorat es sciences appliquées  
Spécialité : génie chimique

Denis Rodrigue

Sherbrooke (Québec), CANADA

Mars 1996

## RÉSUMÉ

Une vaste étude expérimentale a été menée sur la vitesse terminale de chute libre de particules rigides de diverses géométries telles que des barres prismatiques, des cylindres, des sphères, des disques et des débris de pierre dans différents types de fluides présentant des caractères rhéologiques différents: newtoniens, pseudoplastiques, viscoélastiques et de type Boger. On démontre que l'utilisation d'un facteur de forme et d'un nombre de Reynolds généralisé basé sur le modèle rhéologique de Carreau à trois paramètres permet de représenter toutes les mesures sur une courbe maîtresse du coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds. L'étude porte sur plus de 400 points avec une erreur maximale de 25 %.

Par la suite, le même type d'étude a été effectué pour des bulles d'air de volume entre 1 et 1000  $\mu\text{L}$  dans des milieux avec et sans surfactants afin de déterminer l'effet d'impuretés sur la vitesse d'ascension en milieu infini. Deux modèles mathématiques sont utilisés pour représenter l'effet du surfactant sur la vitesse et le coefficient de friction en milieu pseudoplastique: le modèle de la calotte sphérique et le modèle de la distribution continue.

Finalement, des discontinuités ont été mesurées dans les courbes vitesse-volume pour les bulles d'air se déplaçant dans des fluides viscoélastiques. Ce phénomène semble provenir du rapport de force entre la variation de tension de surface et les effets élastiques à l'interface. Lorsque la force élastique domine sur la force de tension de surface, les conditions à l'interface liquide-gaz sont modifiées et le caractère de l'écoulement aussi. À partir d'une analyse dimensionnelle basée sur les paramètres importants ressortis de l'étude expérimentale, une relation est proposée afin de déterminer la possibilité d'une telle discontinuité, ainsi que la valeur du volume auquel elle se produira en fonction des propriétés physiques du fluide.

## REMERCIEMENTS

Huit ans passées, je commençais un baccalauréat en génie chimique à l'Université de Sherbrooke avec une idée en tête: obtenir un doctorat et m'orienter en recherche.

Étant d'usage, je désire en tout premier lieu remercier mon directeur de thèse, le professeur Daniel De Kee pour m'avoir aidé tout au long de mon sinueux cheminement.

On voudrait tous avoir la possibilité durant ces années de pouvoir compter sur quelqu'un dans les moments de problèmes techniques et c'est pour ses conseils et ses connaissances que je désire accorder une mention au Dr. C.F. Chan Man Fong.

Les nombreuses heures passées au laboratoires ne vont sûrement pas sans problèmes. C'est pour cette raison que je désire très sincèrement remercier tous les techniciens du département de génie chimique: M. Alain Lévesque et M. Denis Turcotte pour leur soutien et leur aide précieuse pendant la durée de mes travaux.

On ne le dit jamais assez souvent, mais un merci spécial s'adresse aux différentes secrétaires du département avec lesquelles j'ai eu le plaisir de travailler, pour leur aide et leur gentillesse.

Généralement, un travail de cet envergure ne se réalise pas seul. Une grosse part revient à tous mes collègues étudiants et amis qui se sont succédés tout au long de mon séjour à Sherbrooke. Merci pour leur soutien et leur encouragement.

Intérieur sain dans un corps sain, telle est ma devise. Cette ligne s'adresse alors à tous ceux avec qui j'ai eu la chance de pratiquer un sport quelconque, en particulier à tous mes coéquipiers de football. Période de défoulement quoi!

En terminant, je désire remercier particulièrement le Pr. Pierre Proulx pour ses discussions très éclairées et ses conseils pertinents tout au long de mes travaux.

## TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	i
REMERCIEMENTS	ii
TABLE DES MATIÈRES	iii
LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	vii
1. INTRODUCTION	1
2. PARTICULES RIGIDES	4
2.1 Revue de la littérature	4
2.2 Mesures expérimentales	6
2.2.1 Particules utilisées	6
2.2.2 Fluides utilisés	9
2.2.3 Mesures effectuées	9
2.3 Corrélations	11
2.3.1 Caractérisation des particules	11
2.4 Résultats	14
2.4.1 Rhéologie des fluides	14
2.4.2 Résultats expérimentaux	16
3. MESURES EXPÉRIMENTALES SUR BULLES AVEC SURFACTANT	24
3.1 Revue de la littérature	24
3.2 Montage expérimental	28
3.3 Caractérisation des fluides	30
3.4 Résultats	33
3.5 Discussion	38

4. CORRÉLATIONS POUR FLUIDES PSEUDOPLASTIQUES	40
4.1 Revue de la littérature	40
4.2 Équations mathématiques	46
4.3 Calotte sphérique	48
4.3.1 Solution à l'ordre zéro	49
4.3.2 Solution à l'ordre deux	53
4.4 Distribution continue	55
4.5 Résultats	59
4.5.1 Calotte sphérique	59
4.5.2 Distribution continue	66
4.6 Discussion	69
5. CORRÉLATIONS POUR FLUIDES VISCOÉLASTIQUES	71
5.1 Revue de la littérature	71
5.2 Résultats	74
5.3 Analyse dimensionnelle	82
5.4 Discussion	83
6. CONCLUSIONS	86
RECOMMANDATIONS	89
NOMENCLATURE	91
BIBLIOGRAPHIE	94

## LISTE DES FIGURES

<b>Figure 2.1</b>	Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds $Re_o$ pour la glycérine. — : Equ.(2.16).	18
<b>Figure 2.2</b>	Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds $Re_p$ pour la solution de Gellan. — : Equ.(2.16) modifiée par l'Equ.(2.18).	20
<b>Figure 2.3</b>	Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds $Re_o$ pour la solution de Gellan. — : Equ.(2.16) modifiée par l'Equ.(2.21).	21
<b>Figure 2.4</b>	Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds $Re_o$ . o : Separan, • : Xanthane, ◆ : Gellan, ■ : CMC.	22
<b>Figure 2.5</b>	Correction pour les effets élastiques selon l'Equ.(2.24).	23
<b>Figure 3.1</b>	Effet de la période d'injection sur la vitesse d'une bulle de 70 $\mu$ L. o : 1 GEL, • : 0.10 PAA, ◆ : 0.15 PAA, ◇ : 0.20 PAA, + : 0.25 PAA, ■ : 1 CMC, × : 92 GLY.	29
<b>Figure 3.2</b>	Viscosité en fonction du taux de cisaillement. ◇ : 95 GLY, ◆ : 99 GLY, ★ : 3 PEO.	31
<b>Figure 3.3</b>	Courbes rhéologiques. $\eta$ : • : 0.10 PAA, ◆ : 1 GEL, ■ : 1 CMC. $N_1$ : o : 0.10 PAA.	31
<b>Figure 3.4</b>	Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 92 GLY. o : 0 ppm, • : 30 ppm, ■ : 300 ppm.	33
<b>Figure 3.5</b>	Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 95 GLY. o : 0 ppm, • : 30 ppm, ■ : 300 ppm.	34
<b>Figure 3.6</b>	Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 99 GLY. o : 0 ppm, • : 30 ppm, ■ : 300 ppm.	34
<b>Figure 3.7</b>	Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 1 GEL. o : 0 ppm, • : 100 ppm.	36

<b>Figure 3.8</b>	Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 3 PEO. o : 0 ppm, • : 12.5 ppm, ■ : 100 ppm.	36
<b>Figure 3.9</b>	Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 1 CMC. o : 0 ppm, + : 100 ppm, × : 500 ppm.	37
<b>Figure 3.10</b>	Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 0.10 PAA. o : 0 ppm, • : 100 ppm.	37
<b>Figure 3.11</b>	Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 0.25 PAA. o : 0 ppm, • : 100 ppm.	38
<b>Figure 4.1</b>	Système de coordonnées utilisé.	49
<b>Figure 4.2</b>	Domaine admissible pour les valeurs de $e_5$ et $f_5$ .	58
<b>Figure 4.3</b>	Valeurs calculées de $K_1$ en fonction de $\cos \alpha$ . — de l'Equ.(4.58).	61
<b>Figure 4.4</b>	Valeurs calculées de $C_1$ en fonction de $\cos \alpha$ . — de l'Equ.(4.59).	61
<b>Figure 4.5</b>	Valeurs calculées de $K_1$ en fonction de $\cos \alpha$ .	62
<b>Figure 4.6</b>	Valeurs calculées de $C_2$ en fonction de $\cos \alpha$ .	62
<b>Figure 4.7</b>	Force expérimentale en fonction de la force théorique calculée par le modèle d'ordre cinq. • : 0, o : 30, ■ : 100, ◇ : 500, + : 1000 ppm SDS.	68
<b>Figure 5.1</b>	Vitesse en fonction du volume pour les solutions de PAA contenant 400 ppm SDS. • : 0.10, o : 0.15, + : 0.20, × : 0.25.	75
<b>Figure 5.2</b>	Vitesse en fonction du volume pour les solutions de PAA sans surfactant ajouté. ■ : 0.075, + : 0.10, • : 0.15, ◆ : 0.20, ★ : 0.25.	75
<b>Figure 5.3</b>	Tension de surface des solutions de PAA en fonction de la concentration en polymère.	76
<b>Figure 5.4</b>	Vitesse en fonction du volume et de la concentration en SDS pour la solution 0.10 PAA. • : 0 ppm, o : 50 ppm, + : 100 ppm, ■ : 200 ppm, ◇ : 400 ppm.	77

## LISTE DES TABLEAUX

<b>Tableau 2.1</b>	Dimensions et densités des particules utilisées.	8
<b>Tableau 2.2</b>	Densité et paramètres des modèles rhéologiques des fluides.	16
<b>Tableau 3.1</b>	Propriétés physiques des fluides testés en fonction de la concentration de SDS ajoutée.	32
<b>Tableau 4.1</b>	Valeurs des coefficients $K_3$ - $K_6$ pour les différents modèles.	66
<b>Tableau 5.1</b>	Hauteur du saut de vitesse en fonction de la concentration en surfactant pour les solutions de PAA.	78
<b>Tableau 5.2</b>	Comparaison entre le volume critique expérimental et le critère de Bond.	81
<b>Tableau 5.3</b>	Valeurs des paramètres rhéologiques critiques pour les solutions de PAA.	83
<b>Tableau 5.4</b>	Comparaison entre le volume critique mesuré et calculé par l'Equ.(5.5).	84
<b>Tableau 5.5</b>	Propriétés physiques des solutions de Leal et coll.(1971).	85



## 1. INTRODUCTION

La connaissance de la force de friction sur une particule se déplaçant dans un liquide est requise pour divers calculs permettant la conception d'appareils en génie chimique. Dans plusieurs cas, il est impératif de connaître la vitesse de cette particule afin d'évaluer son temps de contact ou de résidence à l'intérieur du procédé. Dans le cas de particules solides, les applications possibles sont dans le domaine du transport hydraulique de solides, dans les lits fluidisés et fixes, dans les cuves de sédimentation, etc. Dans un second temps, on rencontre d'autres types d'utilisation si la particule est gazeuse: colonnes à bulles servant dans la fermentation, dans le traitement des eaux usées, ainsi que dans l'industrie des mousses et des procédés biologiques.

En général, lorsqu'on traite de ce type de problème de façon industrielle, nous sommes rarement en présence de liquides pures. Certains peuvent contenir des additifs, certains peuvent contenir des impuretés ou les deux à la fois. Ces impuretés peuvent provenir soit du produit initial, soit de sa dégradation ou de contamination durant le procédé lui-même. Comme ces composants peuvent être présents en quantité variant entre quelques ppm et quelques pourcent, ceux-ci peuvent modifier substantiellement les propriétés rhéologiques du fluide lui-même ainsi que les propriétés de transfert à l'interface liquide-gaz dans le cas de bulles.

Il est bien connu maintenant que plusieurs liquides utilisés de façon industrielle présentent un caractère rhéologique bien particulier: celui d'être non-newtonien. Suite à ceci, il devient nécessaire d'obtenir des équations théoriques fiables dans le but de calculer ou d'approximer le

mieux possible la valeur du coefficient de friction sur une particule se déplaçant dans un milieu non-newtonien. Il existe dans la littérature actuelle un grand nombre de travaux traitant du mouvement d'une particule dans un milieu newtonien et le sujet semble assez bien compris. Malgré de nombreux efforts de la part des chercheurs durant ces dernières années, de nombreux points demeurent encore obscurs. Un de ceux-ci est la possibilité d'une discontinuité dans le graphique du logarithme de la vitesse terminale d'une bulle en fonction du logarithme de son volume.

De plus, le système de la bulle en milieu infini est un problème complexe de par sa nature. En effet, l'écoulement autour de celle-ci y est hautement non-viscométrique. Ceci en complique la résolution. Comme il existe plusieurs différences entre le cas newtonien et le cas non-newtonien, peu de points de référence sont disponibles. Malgré tout, certaines analogies ou comportements asymptotiques sont possibles.

A la lueur de ces observations, ce travail possède comme objectifs principaux les suivants:

- a) d'étudier le mouvement de particules solides possédant diverses géométries et se déplaçant dans des fluides non-newtoniens et du fait même, proposer des corrélations afin de prédire le coefficient de friction sur ceux-ci,
- b) d'étudier l'effet de la rhéologie et des impuretés sur le mouvement de bulles en milieu non-newtonien, ceci de façon expérimentale et théorique,

- c) d'évaluer la possibilité d'une discontinuité dans le graphique log-log de la vitesse d'une bulle en fonction de son volume,
- d) proposer une explication pour cette discontinuité, ainsi que de proposer un critère permettant de déterminer le volume auquel la discontinuité est susceptible de se produire.

## 2. PARTICULES RIGIDES

### 2.1 Revue de la littérature:

Basé sur une combinaison de considérations théoriques et expérimentales, plusieurs méthodes sont disponibles présentement pour prédire la valeur de la force de friction ainsi que la vitesse terminale de chute libre de particules rigides sphériques et non-sphériques dans un fluide incompressible et newtonien. Une excellente revue sur les développements dans ce domaine est disponible dans Clift et coll.(1978).

Au contraire, beaucoup moins d'information est disponible sur le problème analogue lorsque le fluide est non-newtonien, même si depuis quelques années, une grande quantité de travaux ont été effectués sur le mouvement de sphères rigides dans différents types de fluides non-newtoniens. Ce sujet a été bien résumé dernièrement par Chhabra (1986,1993), Chhabra et Uhlherr (1989), ainsi que par Walters et Tanner (1992). On s'intéresse plus particulièrement ici au cas de particules non-sphériques dans un fluide non-newtonien.

Brookes et Withmore (1968) ont tenté d'évaluer le seuil de contrainte de suspensions d'argile en mesurant les contraintes résiduelles sur des particules en forme de cylindres et sur des disques. En effectuant l'hypothèse qu'une partie du fluide entourant la particule était dans des conditions de cisaillement nul, ils ont tenté de mesurer cette région en associant la valeur de la force de friction sur la particule comme étant la même que la force prédite par la courbe standard

newtonienne. Dans certains cas, le diamètre effectif s'est avéré être supérieur au diamètre du cylindre utilisé pour effectuer les mesures, ceci mettant en doute directement leur hypothèse initiale. Pazwash et Robertson (1975) ont rapporté quelques mesures de force de friction pour des disques dans des suspensions de boues viscoplastiques. A partir des résultats expérimentaux, ils conclurent que la déviation de la force de friction par rapport à la courbe standard newtonienne devait être seulement une fonction du nombre Bingham. Malheureusement, quelques déficiences à cette méthode ont été exposés par Chhabra et Uhlherr (1989): les courbes présentaient des allures différentes pour des intervalles de nombre de Reynolds généralisés différents. A partir de quelques mesures expérimentales sur des particules de gravier, Torrest (1983) est arrivé à la conclusion que ses particules suivaient la loi de Stokes. Suite à ceci, Peden et Luo (1987) entreprirent une étude expérimentale extensive sur la décantation de cylindres et de disques dans une série de solutions polymériques employées dans le domaine des raffineries de pétrole. Malgré tout, ils n'ont pu trouver de corrélation unique, même pour des fluides présentant des caractères rhéologiques similaires (même indice de loi de puissance). Récemment, Reynolds et Jones (1989) ont présenté des résultats expérimentaux sur des sphères, des disques et des pièces de marbre dans différentes solutions polymériques. A la lueur des leurs résultats, ils conclurent que l'utilisation du diamètre de sphère équivalent était adéquat pour représenter toutes les vitesses mesurées, mais aucune forme générale d'équation n'a été présentée pour la force de friction directement. De plus, les effets de parois sur la vitesse terminale ont été étudiés par Unnikrishnan et Chhabra (1991), ainsi que par Chhabra (1992) pour des cylindres se déplaçant dans des fluides newtoniens et pseudoplastiques. Finalement, Cho et coll.(1992) se sont intéressés à l'hydrodynamique de cylindres se déplaçant dans des solutions newtoniennes et

non-newtoniennes. Les corrélations présentées sont sous forme de régression logarithmique. Ceci n'était pas très utile, car la valeur des coefficients dépendent fortement sur la nature du fluide et sur l'intervalle d'application des résultats donnés. Malgré tout, ces analyses demeurent une base pour l'utilisation du viscosimètre à cylindre.

On peut donc affirmer à ce point que, malgré l'énorme quantité de travaux effectués sur le sujet dans un passé récent, peu de choses sont connues sur le mouvement de particules non-sphériques dans des fluides non-newtoniens. On présente ici une vaste étude expérimentale sur la vitesse terminale de chute libre de différentes géométrie de particules rigides dans une série de fluides présentant une vaste gamme de caractères rhéologiques différents.

## **2.2 Mesures expérimentales.**

### 2.2.1 Particules utilisées

Dans le but d'étudier l'effet de la forme de la particule sur le coefficient de friction, différentes géometries ont été utilisées: sphères, cylindres, disques, prismes droits ainsi que des roches comme particules irrégulières. Les dimensions de chacune des particules ont été mesurées à l'aide d'un micromètre. Les dimensions rapportées au Tableau 2.1 représentent la moyenne de trois valeurs dans le but de minimiser l'erreur. La densité a été mesurée à l'aide d'un pycnomètre à volume constant. Quant aux roches, elles sont représentées à l'aide de leur diamètre de sphère équivalent obtenu par la mesure de leur volume, ainsi que la densité par la mesure de leur masse.

Le Tableau 2.1 résume le tout. On peut y voir une grande diversité dans les dimensions, les densités et les formes géométriques.

TABLEAU 2.1

DIMENSIONS ET DENSITÉS DES PARTICULES UTILISÉES.

Sphères	D [mm]	$\rho_p$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Verre	3	2569
	5	2584
	6	2603
Acier	1.58	7873
	2.37	7828
	3.16	7844
	4.75	7790
	6.35	7794
Cuivre	4.41	7891
Téflon	6.3	2204

<b>Cylindres</b>	Caractéristiques
Nylon	Diamètres de 12.85 et 19.11 mm avec cinq longueurs de 3.14 à 25.54 mm et densités entre 1141 et 1423 kg/m <sup>3</sup> pour les deux types de Nylon.
Plexiglas	Diamètres de 6.65, 12.47 et 18.85 mm avec cinq longueurs de 3.31 à 25.67 mm et densité de 1190 kg/m <sup>3</sup> .
Aluminium	Diamètres de 3.19, 6.29, 12.79 et 19.03 mm avec cinq longueurs de 3.31 à 25.66 mm et densité de 2679 kg/m <sup>3</sup> .
Cuivre	Diamètres de 3.16, 6.33, 12.72 et 19.05 mm avec cinq longueurs de 3.25 à 25.72 mm et densité de 8472 kg/m <sup>3</sup> .
Acier	Diamètres de 3.13, 6.35, 12.62 et 19.02 mm avec cinq longueurs de 3.21 à 25.90 mm et densité de 7742 kg/m <sup>3</sup> .
<b>Prismes droits</b>	
Acier	Côtés de 3.15, 4.74, 6.30, 7.95 et 12.69 avec six longueurs entre 3.39 et 25.66 mm et une densité de 7385 kg/m <sup>3</sup> .
Acier inoxydable	Côté de 4.95 avec six longueurs entre 3.36 et 25.55 mm et une densité de 7610 kg/m <sup>3</sup> .
Aluminium	Côtés de 9.59 et 12.59 avec six longueurs entre 3.27 et 25.46 mm et une densité de 2620 kg/m <sup>3</sup> .
Cuivre	Côté de 9.56 avec six longueurs entre 3.44 et 25.53 mm et une densité de 8230 kg/m <sup>3</sup> .
<b>Roches</b>	15 Particules avec des diamètres de sphères équivalent entre 6.43 et 15.43 mm et densités entre 2566 et 3326 kg/m <sup>3</sup> .



### 2.2.2 Fluides utilisés.

Pour cette partie, six fluides différents ont été utilisés pour évaluer différents caractères rhéologiques. Un fluide newtonien à titre de comparaison: la glycérine et cinq fluides non-newtoniens: 0.1 % poids Separan AP-273 dans un mélange 50/50 poids glycérine/eau distillée, solution aqueuse de 1 % poids de Gomme Xanthane, de Gomme Gellan et de Carboxyméthyl Cellulose (CMC). La dernière solution est composée de polyisobutylène, kérosène et polybutène dans un rapport 0.2/10/89.8 en poids (PIB). Chacune des solutions a été préparée à l'aide du mélangeur rotatif à faible vitesse ( $< 3$  RPM) pour minimiser la dégradation mécanique des molécules. De plus, 250 ppm d'acétate de mercure phénylique a été dissous pour réduire au minimum la dégradation bactériologique des solutions avec le temps.

### 2.2.3 Mesures effectuées.

Le montage expérimental consiste simplement en un tube cylindrique en verre de 80 mm de diamètre et de 450 mm de longueur. Pour chacun des fluides, le tube est rempli avec le fluide à tester et laissé pour la nuit afin d'atteindre l'équilibre mécanique et thermique, ainsi que la sortie de bulles d'air trappées. Par la suite, chacune des particules à tester était introduite sous la surface du fluide au centre du tube. En premier lieu, la distance nécessaire afin d'obtenir la vitesse terminale est déterminée en mesurant la vitesse à différents endroits à l'intérieur de la descente. La vitesse est déterminée ici en chronométrant le temps requis pour la particule à franchir une certaine distance préétabli par une série de lignes tracées sur les deux faces

opposées afin d'éliminer les effets de parallaxe. Le chronométrage a été effectué manuellement à l'aide d'un chronomètre digital affichant au centième de seconde. La principale source d'erreur sur la mesure est donc le temps de réaction de l'expérimentateur. Ceci a été évalué à 0.5 s maximum. Cela a pour effet que l'erreur relative des mesures augmente avec la vitesse (le temps de mesure diminue).

Finalement, chaque particule fut testée au minimum deux fois afin d'obtenir une valeur moyenne et minimisant ainsi l'incertitude sur les mesures. La distance fixe pour mesurer la vitesse terminale était au minimum 100 mm de chaque extrémité du tube pour minimiser les effets de bouts, tout en respectant la distance minimale afin d'obtenir une vitesse constante comme mentionné ci-haut.

## 2.3 Corrélations

Connaissant les propriétés physiques des particules et des fluides, il est possible de relier le coefficient de friction à la vitesse terminale de chute libre de la particule par un bilan de force:

$$C_d = \frac{V_p(\rho_p - \rho_f)g}{\frac{1}{2}\rho_f U_\infty^2 A_p} \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) peut donc s'écrire pour un sphère:

$$C_d = \frac{4gD(\rho_p - \rho_f)}{3\rho_f U_\infty^2} \quad (2.2)$$

A partir d'une analyse dimensionnelle, on peut montrer que le coefficient de friction est une fonction du nombre de Reynolds, de la géométrie de la particule et des paramètres rhéologiques du fluide. Ces derniers étant fonction du modèle spécifique choisi pour représenter le fluide.

### 2.3.1 Caractérisation des particules.

Dans le cas de particules non-sphériques, il existe différentes corrections à apporter pour approximer les corrélations d'une sphère. Une de celles-ci est le diamètre de sphère équivalent. Il représente le diamètre d'une sphère ayant le même volume que la particule. Il est défini comme:

$$D_s = \left( \frac{6V_p}{\pi} \right)^{1/3} \quad (2.3)$$

Une autre possibilité est d'utiliser le diamètre de sphère normalisé. Il représente le diamètre d'un cercle ayant la même projection que la particule. Il est défini comme:

$$D_n = \left( \frac{4A_p}{\pi} \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

Un dernier paramètre utilisé est la sphéricité. Il représente le rapport entre la surface totale de la sphère de diamètre équivalent et la surface totale réelle de la particule. Sa valeur est donc:

$$\Psi = \frac{\pi D_s^2}{A} \quad (2.5)$$

A partir de ces définitions, on définit le facteur de forme (K) comme étant le rapport de la vitesse réelle de la particule à la vitesse de la particule sphérique équivalente. Sa valeur est donnée par:

$$K = \frac{U_{ns}}{U_s} \quad (2.6)$$

Il est donc possible de reporter les résultats obtenus pour les particules non-sphériques à des résultats standards de particules sphériques en appliquant une correction par le facteur de forme.

Ce dernier étant une fonction de  $D_s$ ,  $D_n$  ou  $\Psi$ .

Pettyjohn et Christiansen (1948) furent les premiers à proposer une expression pour le facteur K dans le cas des particules isométriques. Leur relation s'exprime en fonction de  $\Psi$  comme suit:

$$K = 0.843 \log \left( \frac{\Psi}{0.065} \right) \quad (2.7)$$

Plus tard, Heiss et Coull (1952) développèrent des équations similaires dans le cas de particules non-isométriques. Pour des particules possédant un  $D_n$  constant, la relation obtenue est:

$$\log K = \left\{ -0.270 \left( \frac{D_s}{D_n} - 1 \right) / \sqrt{\Psi} \left( \frac{D_s}{D_n} \right)^{0.345} + \log \left( \sqrt{\Psi} \frac{D_s}{D_n} \right) \right\} \quad (2.8)$$

Dans le cas où  $D_n$  est variable, l'équation est donnée par:

$$\log K = \left\{ -0.250 \left( \Psi \frac{D_s}{D_n} \right)^{0.5} \left( \frac{D_s}{D_n} - 1 \right) + \log \left( \sqrt{\Psi} \frac{D_s}{D_n} \right) \right\} \quad (2.9)$$

Dans les dernières expressions,  $D_n$  constant exprime le fait que l'axe principal de la particule est vertical. Un  $D_n$  variable exprime le fait que l'axe principal de la particule est horizontal. Une particule se déplaçant dans l'une ou l'autre de ces positions aura une vitesse différente, d'où un facteur  $K$  différent.

De par leur complexité, les équations (2.8-9) ne sont pas utilisées fréquemment. Dans le but de les simplifier, Singh et Roychowdhury (1969) en proposèrent deux plus simples:

$$K = 0.844 + 9.273 \left( \frac{D_s}{D_n} \right) \sqrt{\Psi} - 0.170 \left( \frac{D_s}{D_n} \right)^2 \Psi \quad (2.10)$$

pour un  $D_n$  constant et:

$$K = 0.620 + 0.203 \left( \frac{D_s}{D_n} \right) \sqrt{\Psi} - 0.133 \left( \frac{D_s}{D_n} \right)^2 \Psi \quad (2.11)$$

pour un  $D_n$  variable. Pour des particules ayant une forme irrégulière, Hottovy et Sylvester (1979) ont démontré que le diamètre de sphère équivalente était suffisant pour représenter leurs données du coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds si ce dernier était inférieur à 100. L'avantage d'utiliser le facteur de forme  $K$  est de corriger la vitesse de la particule pour la non-sphéricité et d'utiliser par la suite les courbes standards pour les particules sphériques qui sont assez bien connues maintenant.

## 2.4 Résultats.

### 2.4.1 Rhéologie des fluides.

Pour les fluides newtoniens, la viscosité est considérée comme constante pour des conditions isothermes. Dans ce cas, la viscosité est représentée par le modèle de Newton:

$$\eta = \eta_o \quad (2.12)$$

Avec  $\eta_o$  une constante. Dans le cas contraire, on peut représenter la rhéologie des fluides par un modèle de Newton généralisé. Dans ce cas, la viscosité est posée comme étant une fonction du second invariant du tenseur du taux de déformation (II). Plusieurs modèles existent et se distinguent par le nombre de constantes à évaluer afin de représenter la courbe expérimentale.

Un modèle couramment utilisé pour sa simplicité est le modèle à deux paramètres d'Ostwald de Waele (loi de puissance). Il s'énonce comme suit:

$$\eta = m \left( \frac{\dot{\gamma}}{2} \right)^{(n-1)/2} \quad (2.13)$$

où  $m$  et  $n$  sont des paramètres à évaluer pour chaque fluide. L'inconvénient de ce modèle est son incapacité à représenter correctement la viscosité à faibles taux de déformation. Un second modèle très utilisé est celui de Carreau (1972):

$$\eta = \eta_o \left[ 1 + \lambda^2 \left( \frac{\dot{\gamma}}{2} \right)^2 \right]^{(n-1)/2} \quad (2.14)$$

où  $\eta_o$ ,  $\lambda$  et  $n$  sont les trois paramètres du modèle. L'équation (2.13) représente assez bien la viscosité des tous les fluides de cette étude sauf pour la solution de polyisobutylène (PIB) qui est plutôt de type Boger: contraintes normales avec viscosité quasi constante. Le Tableau 2.2 donne la densité, ainsi que les paramètres des différents modèles pour les fluides utilisés. Les courbes viscosité en fonction du taux de déformation ont été mesurées à l'aide d'un rhéogoniomètre Weissenberg modèle R-20 avec un système cône et plaque de 4 et 5 cm de diamètre et des angles entre 1:58 et 1:59°.

TABLEAU 2.2 DENSITÉ ET PARAMÈTRES DES MODÈLES RHÉOLOGIQUES DES FLUIDES UTILISÉS.

Fluide	$\rho_f$	Carreau			Puissance	
		$\eta_0$	$\lambda$	n	m	n
	[kg/m <sup>3</sup> ]	[Pa.s]	[s]	[-]	[Pa.s <sup>n</sup> ]	[-]
Glycérine	1261	1.17	0	1	1.17	1
Separan	1129	3.71	14.56	0.48	0.93	0.51
Xanthane	1017	4264	574.73	0.12	18.59	0.07
Gellan	1022	25.4	18.56	0.36	3.91	0.36
CMC	1004	7.03	65.99	0.66	2.66	0.55
PIB	829	0.083	0	1	0.083	1

Dans le cas du fluide de Boger, il nous faut aussi quantifier les effets viscoélastiques. Ceci est fait avec l'aide de la mesure de la différence des contraintes normales primaires ( $N_1$ ). Cette mesure nous permet de définir un temps de relaxation du fluide comme suit:

$$\theta = \frac{N_1}{2\tau\dot{\gamma}} \quad (2.15)$$

où  $\theta$  est le temps de relaxation,  $\tau$  est la contrainte de cisaillement et  $\dot{\gamma}$  est le taux de cisaillement. Dans la région quadratique, la valeur de  $\theta$  est de 0.0072 s pour le PIB.

#### 2.4.2 Résultats expérimentaux.

Dans le but de comparaison, la solution de glycérine a été utilisée a priori pour tester les expérimentations. Pour les fluides newtoniens, plusieurs approches existent afin de représenter le coefficient de friction sur des particules sphériques on non. Un résumé de celles-ci est disponible



dans Clift et coll.(1978). La plus simple d'entre elles consiste tout simplement à utiliser le diamètre de sphère équivalent comme dimension linéaire pour le facteur de forme. Nous allons plutôt utiliser ici le facteur de forme  $K$  pour une meilleure corrélation. Il est à remarquer que l'Equ.(2.11) peut donner des valeurs supérieures à l'unité, ce qui est physiquement impossible. Nous allons pour cette raison utiliser les Eqs.(2.8-9) pour le facteur de forme.

Pour le cas de particules sphériques, la courbe standard pour le coefficient de friction est donnée par Perry et Green (1984):

$$C_d = \frac{24}{Re_o}(1 + 0.14 Re_o^{0.7}) \quad Re_o < 1000 \quad (2.16)$$

où le nombre de Reynolds  $Re_o$  est donné par:

$$Re_o = \frac{\rho_f U_\infty D_s}{\eta_o} \quad (2.17)$$

La Figure 2.1 représente la correspondance entre les valeurs expérimentales et l'Equ.(2.16) pour la glycérine. La déviation maximale à la courbe standard est de 7 %. À la vue de cette correspondance, nous pouvons affirmer que les effets de parois sont effectivement négligeables. Ceci est en accord avec les résultats obtenus par Reynolds et Jones (1989). Pour les particules non-sphériques, il suffit de remplacer  $D$  par  $D_s$  calculé par l'Equ.(2.3) et  $U_\infty$  par  $U_{ns}$  calculé par l'Equ.(2.6)

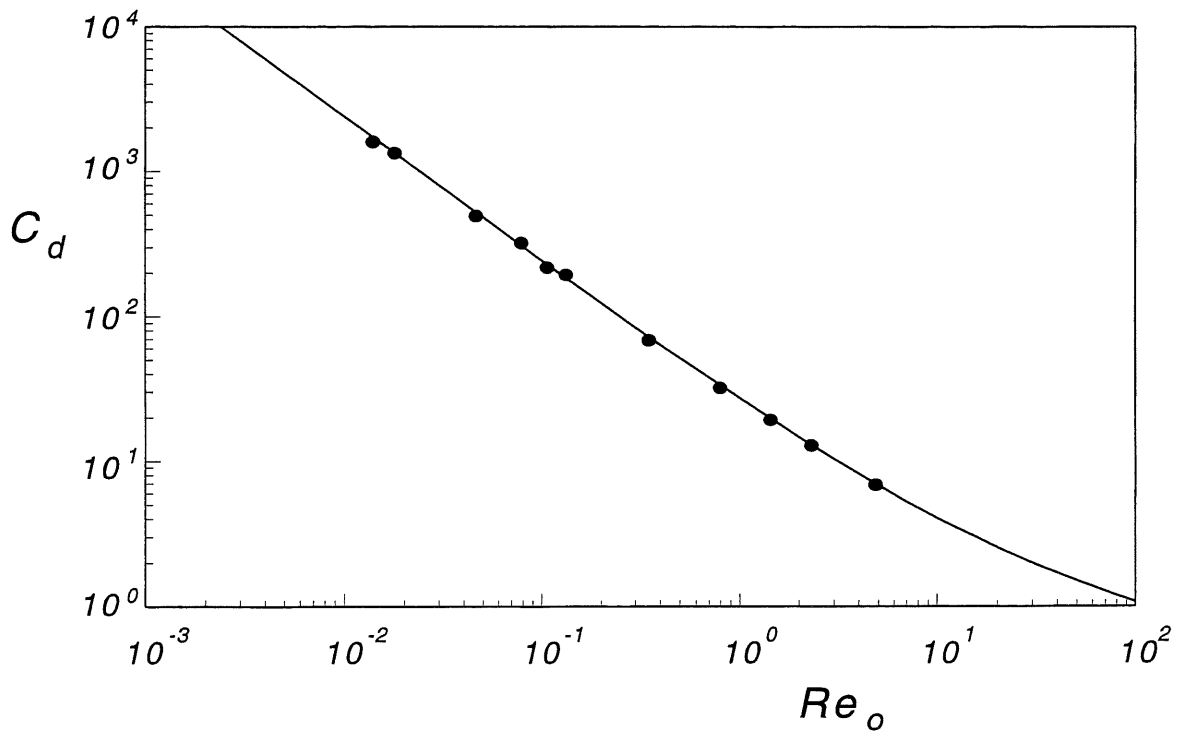


Figure 2.1 Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds  $Re_o$  pour la glycérine.  
 —: Equ.(2.16).

Dans le cas des fluides non-newtoniens, il serait souhaitable d'obtenir une relation similaire à l'Equ.(2.16) en utilisant un nombre de Reynolds généralisé tenant compte du caractère rhéologique du fluide. Ceci revient à trouver une relation pour le coefficient de friction en fonction de  $Re_o$  et des paramètres rhéologiques du fluide. Dans le cas du modèle de la loi de puissance, le nombre de Reynolds  $Re_p$  est défini comme étant:

$$Re_p = \frac{\rho_f (U_\infty)^{2-n} (D_s)^n}{m} \quad (2.18)$$

Il est donc possible de remplacer dans l'Equ.(2.16),  $Re_o$  par  $Re_p$ . La Figure 2.2 est une représentation typique des résultats obtenus à l'aide de ce type de relation . On y voit une bonne corrélation pour des nombres de Reynolds assez élevés. La correspondance est tout aussi mauvaise lorsque le nombre de Reynolds tend vers zéro. Ceci s'explique par l'incapacité du modèle de la loi de puissance de représenter la courbe de viscosité pour de faibles taux de déformation. Dans le but d'améliorer la corrélation, il nous faut utiliser un modèle comportant un nombre supérieur de paramètres afin de représenter la courbe de viscosité dans toute la gamme de taux de déformation. Ceci est fait à l'aide de l'Equ.(2.14). Nous allons considérer le coefficient de friction comme étant une fonction des nombres adimensionnels régissant le mouvement. Alors on peut écrire:

$$C_d = f(Re_o, Cu, n) \quad (2.19)$$

où  $n$  est le paramètre du modèle de Carreau et  $Cu$  est le nombre de Carreau défini comme:

$$Cu = \frac{\lambda U_\infty}{D_s} \quad (2.20)$$

où le nombre de Carreau représente les effets du caractère rhéofluidifiant du milieu. A partir de ces définitions, plusieurs combinaisons ont été essayées dans le but d'obtenir une courbe maîtresse à partir de toutes les données recueillies. On définit alors un nombre de Reynolds généralisé basé sur le modèle de Carreau comme étant:

$$Re_c = Re_o(1 + Cu^{n-1}) \quad (2.21)$$

De façon similaire au modèle de la loi de puissance, il suffit de remplacer  $Re_0$  dans l'Equ.(2.16) par  $Re_c$ . La Figure 2.3 présente une bonne corrélation pour l'ensemble des nombres de Reynolds  $Re_c$ .

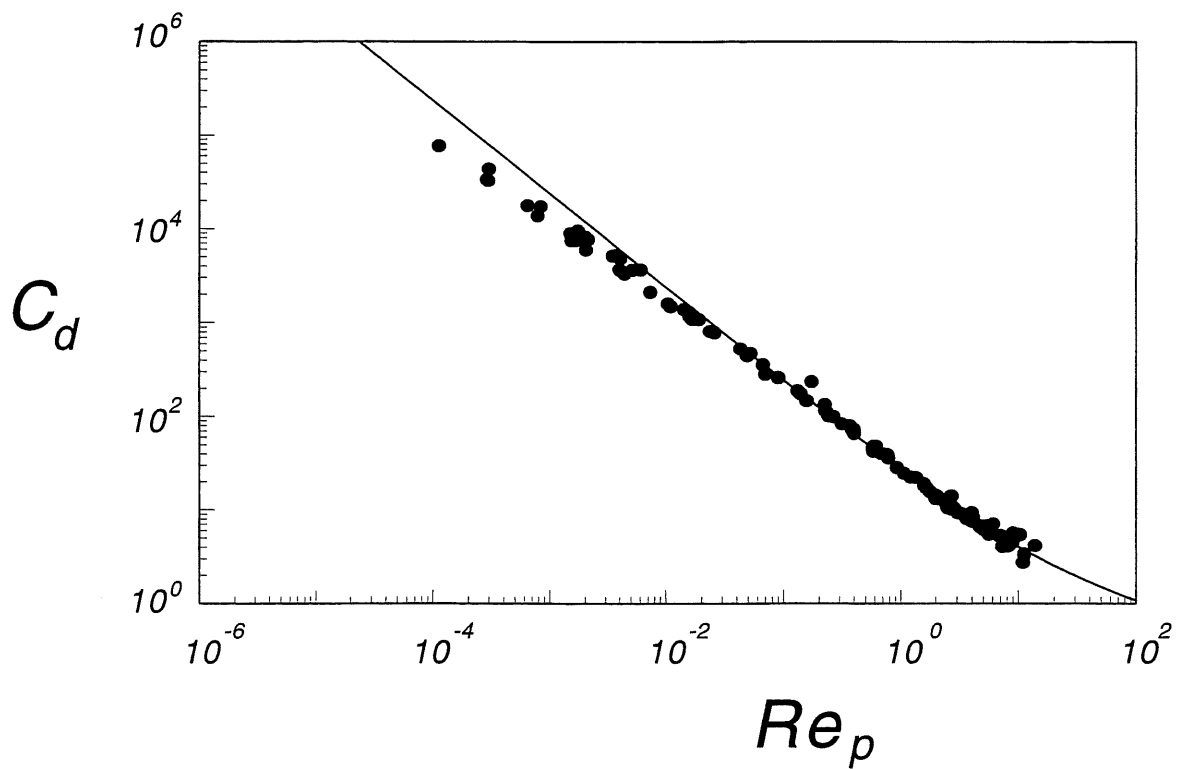


Figure 2.2 Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds  $Re_p$  pour la solution de Gellan. — : Equ.(2.16) modifiée par l'Equ.(2.18).

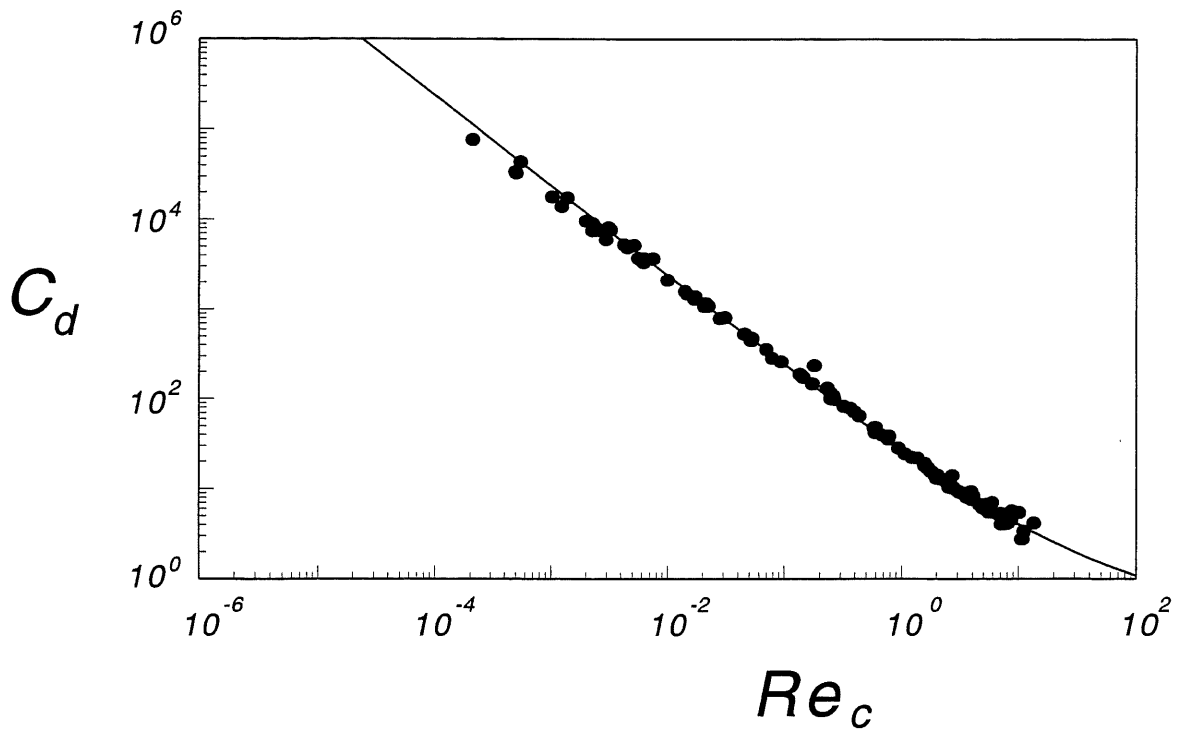


Figure 2.3 Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds  $Re_c$  pour la solution de Gellan. — : Equ.(2.16) modifiée par l'Equ.(2.21).

La Figure 2.4 présente l'ensemble des données expérimentales sauf pour la solution de PIB. Au total, environ 400 points ont été recueillis. Dans un but de clarté, seulement quelques points sont montrés sur la Figure 2.4. On peut y voir une assez bonne corrélation pour une vaste gamme de nombres de Reynolds (dix décades) jusqu'à concurrence d'un nombre de Reynolds de 50. Cette relation se compare avantageusement avec les différents résultats rapportés par Cho et coll.(1992) où seulement quatre décades étaient rapportées. On peut donc affirmer par la Figure 2.4 que la courbe standard pour des particules sphériques dans un fluide newtonien peut être retrouvée par l'application de facteurs correctifs appropriés: un facteur de forme tenant compte de la géométrie de la particule et un nombre de Reynolds généralisé tenant compte de la rhéologie du fluide.

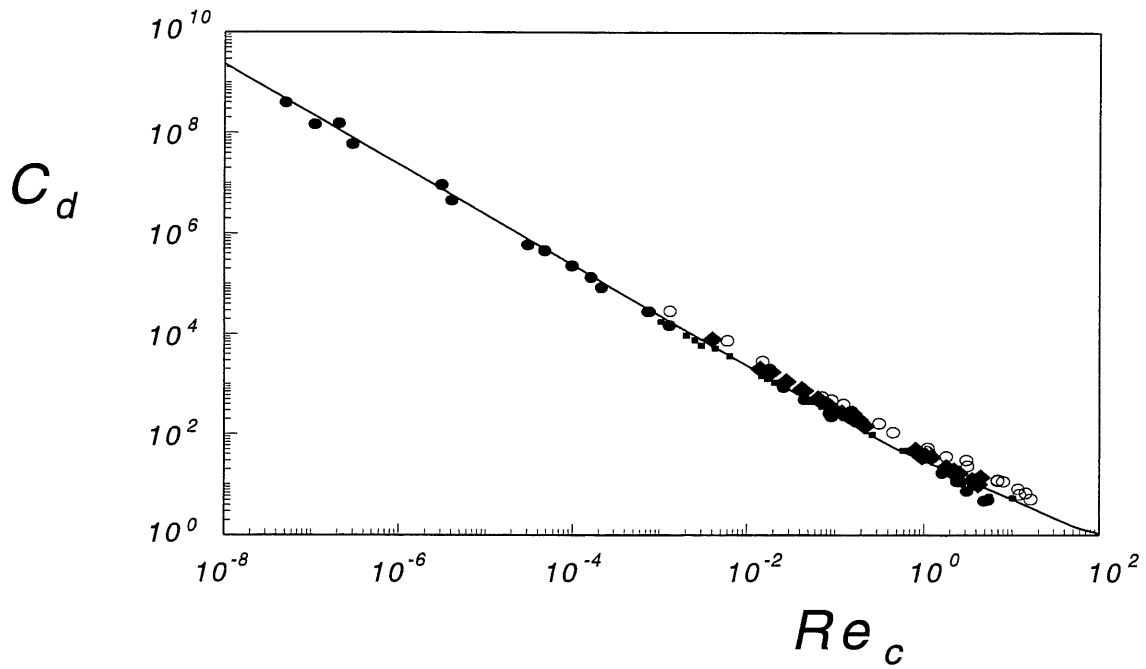


Figure 2.4 Coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds  $Re_c$ .  
o : Separan, • : Xanthane, ◆ : Gellan, ■ : CMC.

Dans le cas du PIB, il est nécessaire d'introduire le nombre de Weissenberg pour tenir compte de l'élasticité du fluide sur le coefficient de friction. Le nombre de Weissenberg est défini comme:

$$Wi = \frac{\theta U_\infty}{D_s} \quad (2.22)$$

D'après Chhabra (1986), on définit un facteur de correction  $X$  pour tenir compte de l'élasticité dans notre cas:

$$X = C_d^*/C_d \quad (2.23)$$

où  $C_d^*$  réfère au coefficient de friction obtenu expérimentalement et  $C_d$  est celui calculé à partir de l'Equ.(2.16). On peut poser que  $X$  est une fonction de  $Wi$ . Après régression, la relation obtenue est:

$$X = 1 + Wi^{-1/3} \quad (2.24)$$

La Figure 2.5 compare l'Equ.(2.24) avec les données expérimentales pour la solution de PIB. La relation représente les données de façon acceptable pour l'intervalle de valeur suivante:

$$0.4 < Re_0 < 50 \text{ et } 0.03 < Wi < 0.40$$

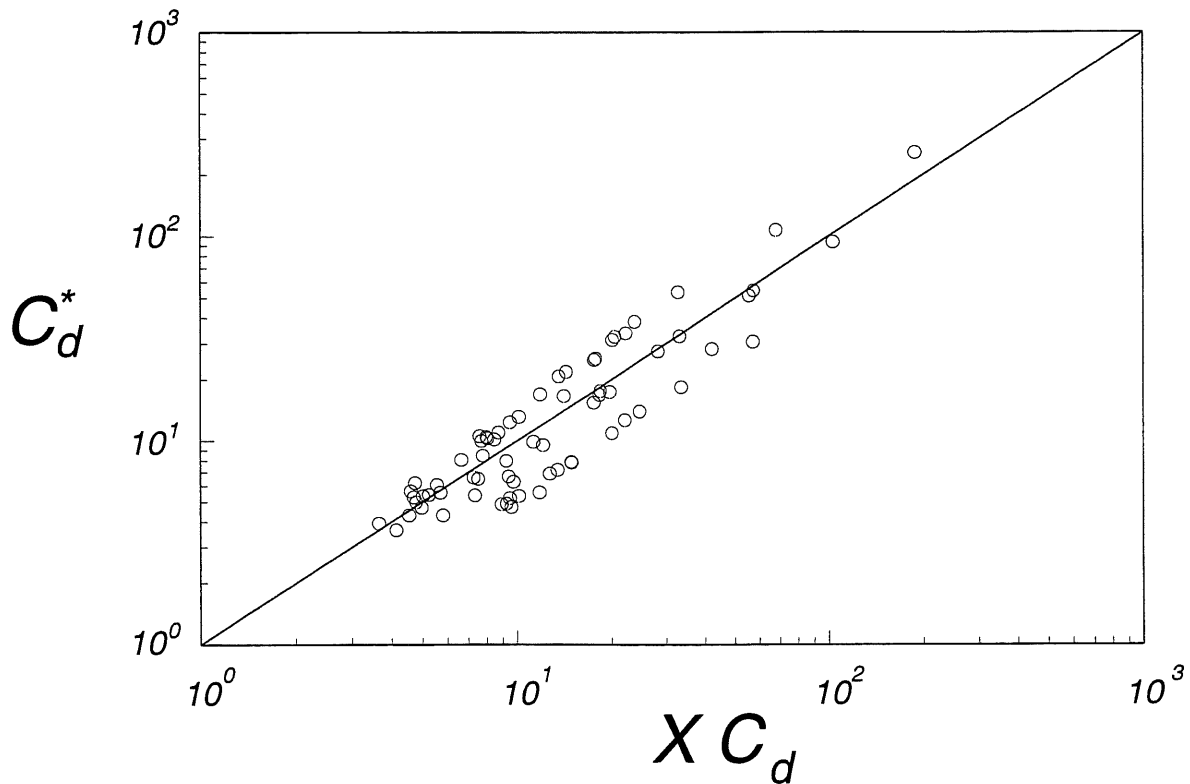


Figure 2.5 Correction pour les effets élastiques selon l'Equ.(2.24).

### 3. MESURES EXPÉRIMENTALES SUR BULLES AVEC SURFACTANT

Nous allons nous intéresser plus particulièrement au cas de particules gazeuses ici. Dans ce cas, les conditions à l'interface liquide-gaz sont déterminantes. C'est pour cette raison, que nous allons nous intéresser à la modification de ces conditions et à leurs effets sur l'hydrodynamique du système. Les propriétés de l'interface sont très sensibles à la présence d'impuretés dans le liquide. Nous allons simuler cette contamination par l'introduction de surfactants (agents tensioactifs).

#### 3.1 Revue de la littérature

Plusieurs études expérimentales et théoriques sont disponibles dans la littérature sur le sujet du mouvement de particules dans un milieu infini. Mentionnons les premiers travaux de Stokes, d'Hadamard et de Rybzcinsky. Depuis, une variété d'équations ont été proposées afin de prédire la force de friction agissant sur une particule selon les différentes conditions d'écoulement, et ce pour de particules rigides, liquides et gazeuses. La majeure partie de ces résultats associés aux fluides Newtoniens est disponible dans le livre de Clift et coll.(1978).

Dans la situation où des surfactants sont présent dans le milieu liquide, une certaine quantité d'études expérimentales ont été effectuées depuis le milieu du siècle. Elzinga et Banchemo (1961) ont utilisé une méthode photographique pour déterminer le déplacement du point de décollement de la couche limite causée par une réduction de la circulation interne dans le cas de gouttes. Leur étude a révélé qu'une faible quantité d'impureté avait un effet négligeable sur la densité et la



viscosité, mais un effet marqué sur le coefficient de friction et sur la circulation à l'intérieur de la goutte. Plus tard, Horton et coll.(1965) ont utilisé la photographie à particules traçantes afin de confirmer les observations de Elzinga et Banchemo (1961). Ils ont aussi déterminé que la contamination de leurs liquides provenait de particules colloïdales d'alumine issues des conduites servant à leur expérimentation. Huang et Kintner (1969) ont étudié expérimentalement le mouvement de gouttes d'eau dans une colonne de cyclohexanol saturé en eau et contenant du Zonyl S-13 (fluoroalkyl de phosphate sans acide). Ils ont découvert que le transfert de masse était diminué par la présence d'impuretés et que la diminution était une fonction de la concentration et de la quantité absorbée à la surface de la bulle. En utilisant une surface effective réduite pour le transfert de masse, ils ont développé une corrélation pour le nombre de Sherwood en fonction de la concentration d'impuretés. Il est connu aussi que pour des gouttes, le graphique de la vitesse terminale en fonction du volume, présente un maximum à un certain volume critique. A des volumes supérieurs, la goutte oscille et le mouvement n'est pas stable. Gonzalez-Tello et coll.(1992) ont observé expérimentalement que le volume critique augmentait avec l'augmentation de la concentration de surfactants. Ceci est dû au fait que le surfactant retarde la vitesse interfaciale ce qui ralentit la goutte et le début des oscillations.

En approximant une bulle comme étant une goutte de très faible viscosité, on peut s'attendre que les mêmes phénomènes observés dans le cas des gouttes, se produisent aussi. Griffith (1962) a réalisé une étude extensive du mouvement de bulles et de gouttes dans divers fluides contenant différents surfactants. La majorité de ses mesures sont bien représentées par le modèle de la calotte sphérique de Savic. Néanmoins, il est connu que l'influence des surfactants sur la vitesse

terminale de la particule dépend de la solubilité de celui-ci. Récemment, Yamamoto et Ishii (1987) ont mesuré la vitesse et la forme de bulles d'air de grands volumes dans de l'eau distillée contenant 5 ou 10 ppm de sulfate de lauryl de sodium et de poly oxy-éthylène monostéarate. Sous ces conditions, ils ont observé que la vitesse n'était que très peu influencée par la présence de surfactant, mais qu'au contraire, le coefficient de friction l'était. Cet effet fut attribué à la déformation de la particule qui est non négligeable pour de forts volumes.

Une étude plus récente de la déformation de bulles dans les fluides newtoniens est disponible dans Karamanev (1994). Dans la plupart des cas, le gaz utilisé est de l'air et dans de rares cas, du dioxyde de carbone ou de l'azote. Très peu de résultats sont disponibles dans le cas où le milieu n'est pas infini. Kopf-Sill et Homsy (1988), ainsi que Park et coll.(1994) ont utilisé une cellule de Hele-Shaw pour étudier l'influence de surfactants sur le mouvement et la déformation de bulles lorsqu'elles se trouvent près d'une paroi. Dans le premier cas, Kopf-Sill et Homsy (1988) ont déterminé six formes possibles pour la particule ainsi que les conditions dans lesquelles elles existent. Ceci fut effectué en caractérisant le mouvement par son nombre de Capillaire et son nombre de Bond. En second lieu, Park et coll.(1994), en utilisant de l'eau et de l'huile silicone, ont observé que la vitesse des bulles était plus affectée dans l'eau que dans l'huile. Ceci met en évidence l'influence de la solubilité du surfactant dans le fluide et de la viscosité du milieu ambiant sur le transfert à l'interface.

Une revue des résultats existants pour les fluides non-newtoniens est disponible dans Chhabra (1993). Malgré tout, des études expérimentales sur le mouvement de bulles dans des fluides

non-newtoniens, où des surfactants ont délibérément été introduits, sont quasi inexistantes. De Kee et coll.(1990) ont mesuré la vitesse de bulles d'air et de dioxyde de carbone dans une solution 1 % poids de polyacrilamide (AP-30) dans une solution 50/50 % poids eau/glycérine. Leur étude a permis de mesurer la vitesse de bulles possédant un volume entre 20 et 10000  $\mu\text{L}$ . En ajoutant 0.042 % poids de monolaurate de sorbitan (un surfactant non-ionique), la tension de surface diminue de 0.065 à 0.034 N/m. Ceci eu comme effet de diminuer de façon appréciable la vitesse de bulles ayant des volumes inférieurs à 100  $\mu\text{L}$ . De Kee et Carreau (1993) ont discuté aussi de l'effet de surfactants sur la coalescence de deux bulles dans un milieu viscoélastique. Pour que la coalescence se produise, des volumes supérieurs étaient nécessaires comparés aux cas où aucun surfactant était présent. L'effet principal des surfactants est de retarder la vitesse interfaciale, ceci ayant un influence direct sur le temps de drainage du film séparant les deux bulles.

On s'intéresse plus particulièrement ici à l'extension du travail de De Kee et coll.(1990) à différents polymères avec différentes concentrations de surfactant. Nous allons spécifiquement regarder la vitesse d'une bulle de gaz dans un milieu non-newtonien infini contenant des surfactants. Le problème de la déformation n'est pas pris en ligne de compte a priori car le nombre de Reynolds est faible dans tous les cas.

### 3.2 Montage expérimental

Le montage expérimental consiste simplement en une colonne de Plexiglas de section carrée de 80 mm de côté et de 600 mm de hauteur. Une série de lignes furent tracée de chaque côté afin d'éliminer les effets de parallaxes. Ces lignes sont situées à une distance minimale de 80 mm de chaque extrémité de la colonne afin de minimiser les effets de bouts. La vitesse fut mesurée en chronométrant le temps requis pour la bulle à parcourir une certaine distance prédéterminée entre deux lignes. Un minimum de trois mesures furent prises pour chaque volume afin d'obtenir une moyenne. Les bulles furent introduites par le bas de la colonne à l'aide d'une seringue de chromatographie en phase gazeuse au travers d'un septum. De cette façon, des volumes entre 1 et 1000 mL pouvaient être injectés avec une erreur maximale de 2  $\mu$ L. Ceci nous permettait donc de tracer les courbes de la vitesse en fonction du volume pour chaque combinaison de fluides-surfactants (voir la section 2.2.3 pour détails).

Chacune des solutions doit être testée a priori afin de déterminer si la période d'injection (le temps entre deux bulles successives) avait un effet sur la vitesse terminale. Il est connu que certaines solutions polymériques nécessitent de longue période d'injection afin d'obtenir des résultats qui sont indépendants de la période d'injection. Cette observation est discutée dans: Carreau et coll.(1974), Cho et Hartnett (1979), Cho et coll.(1984), Park et Irvine (1984), De Kee et coll.(1986), Ambeskar et Mashelkar (1990) et Rodrigue et coll.(1994). Ce phénomène a été attribué à une combinaison d'effets élastiques et d'orientation des macromolécules résultant du passage d'une bulle. Comme expliqué dans De Kee et coll.(1986), les polymères à haut poids

moléculaires peuvent être alignés par le passage d'une bulle laissant derrière une région de résistance inférieure pour le passage d'une seconde bulle. La configuration isotrope initiale est retrouvée par diffusion moléculaire, ce qui peut entraîner de longue période d'injection. La Figure 3.1 démontre l'effet de la période d'injection sur la vitesse de différents fluides utilisés dans le cas d'une bulle de 70  $\mu\text{L}$ .

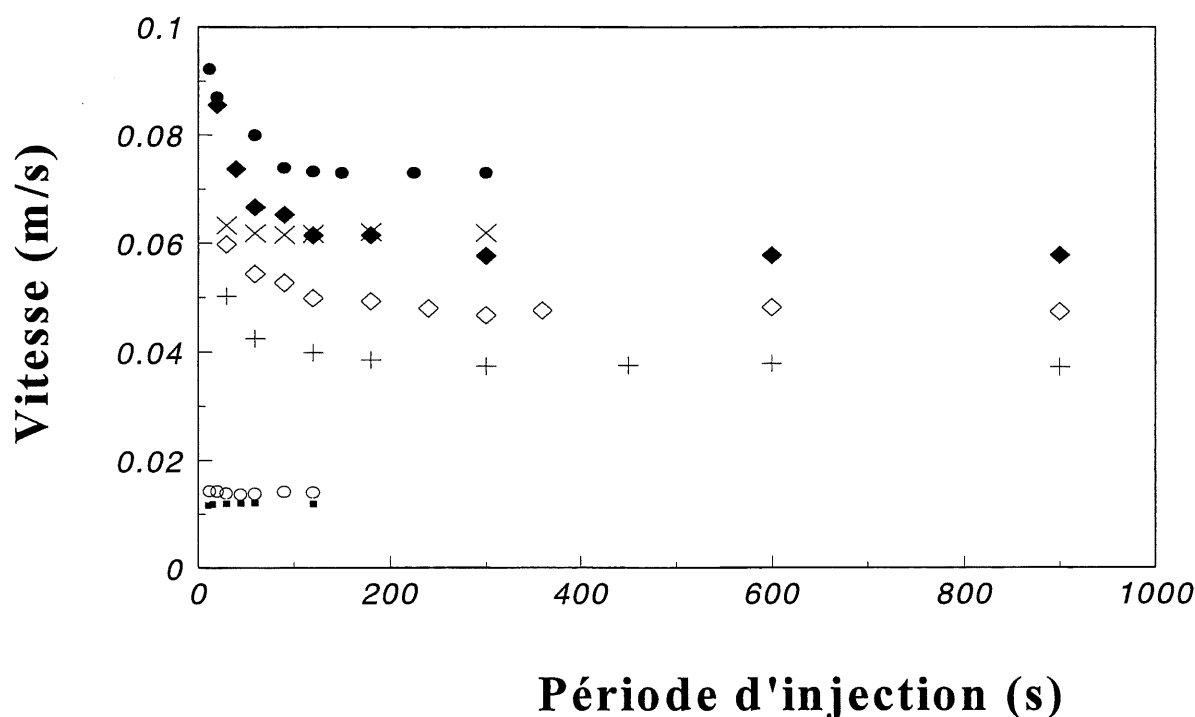


Figure 3.1

Effet de la période d'injection sur la vitesse d'une bulle de 70  $\mu\text{L}$ .

o : 1 GEL, • : 0.10 PAA, ◆ : 0.15 PAA, ◇ : 0.20 PAA, + : 0.25 PAA,  
 ■ : 1 CMC, × : 92 GLY.

Les fluides utilisés dans cette étude sont: 92, 95 et 99 % poids glycérine dans l'eau distillée (GLY), 1 % poids carboxyméthyle de cellulose (CMC) dans l'eau distillée, 1 % poids de gomme de Gellan (GEL) dans l'eau distillée, 3 % poids d'oxyde de polyéthylène (PEO) dans un mélange

50/50 % poids d'eau/glycérine, ainsi que 0.075, 0.1, 0.15, 0.2 et 0.25 % poids de polyacrilamide AP-273 (PAA) dans un mélange 50/50 % poids d'eau/glycerine. Pour chacun des fluides, différentes concentrations de sulfate de dodecyl de sodium (SDS) entre 0 et 500 ppm ont été testées. La Figure 3.1 nous montre donc que pour tous les fluides testés, seules les solutions de PAA présentent un effet de la période d'injection. Ceci semble être un effet viscoélastique comme discuté plus loin.

### **3.3 Caractérisation des fluides**

Afin de pouvoir caractériser les fluides utilisés, nous devons mesurer les courbes rhéologiques de ceux-ci, ainsi que les propriétés physiques comme la densité et la tension de surface. Les courbes rhéologiques sont obtenus à l'aide d'une rhéogoniomètre Weissenberg modèle R-20. Les Figures 3.2 et 3.3 montrent quelques courbes caractéristiques pour quelques fluides. Trois catégories de fluides ressortent de l'analyse rhéologique des fluides. Trois d'entre eux sont newtoniens: 92, 95 et 99 GLY, trois sont pseudoplastiques (inélastiques): 1 GEL, 3 PEO et 1 CMC et cinq sont viscoélastiques: 0.075, 0.10, 0.15, 0.20 et 0.25 PAA. Par la suite, la densité fut mesurée à l'aide d'un pycnomètre à volume constant et la tension de surface, à l'aide de la méthode de l'anneau de Du Nouy. La Table 3.1 rapporte les valeurs pour chacun des fluides. On peut y voir entre autre que le surfactant a un effet différent sur chacun des fluides. Ceci montre que non seulement la viscosité a un effet sur l'influence du surfactant, mais aussi sa nature ionique ainsi que le coefficient de diffusion.

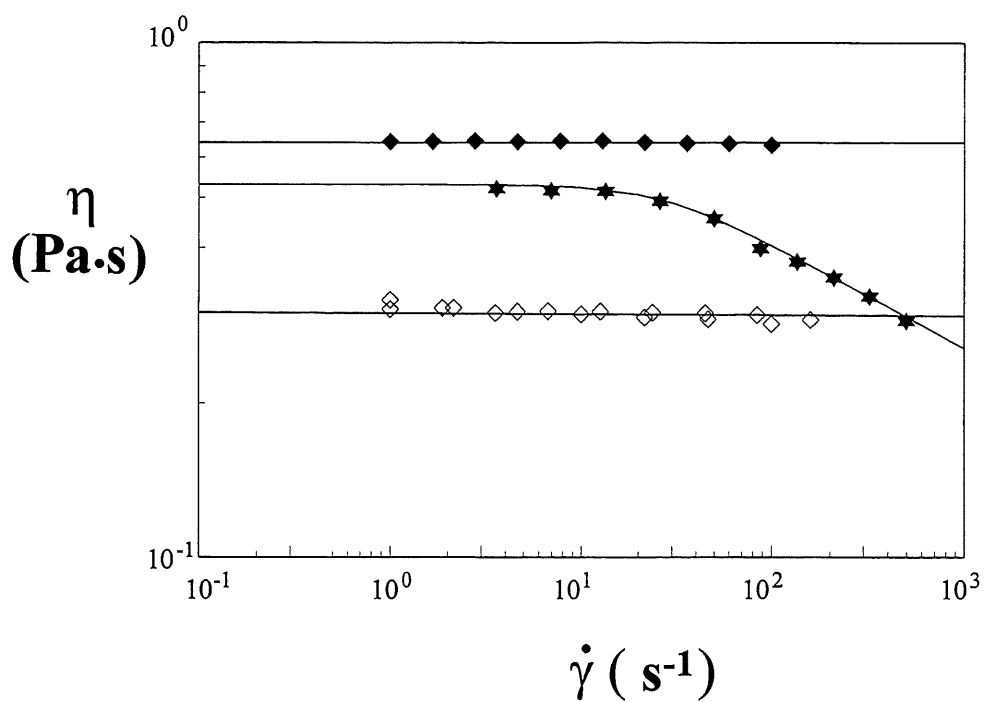


Figure 3.2 Viscosité en fonction du taux de cisaillement.  $\diamond$  : 95 GLY,  $\blacklozenge$  : 99 GLY,  $\star$  : 3 PEO.

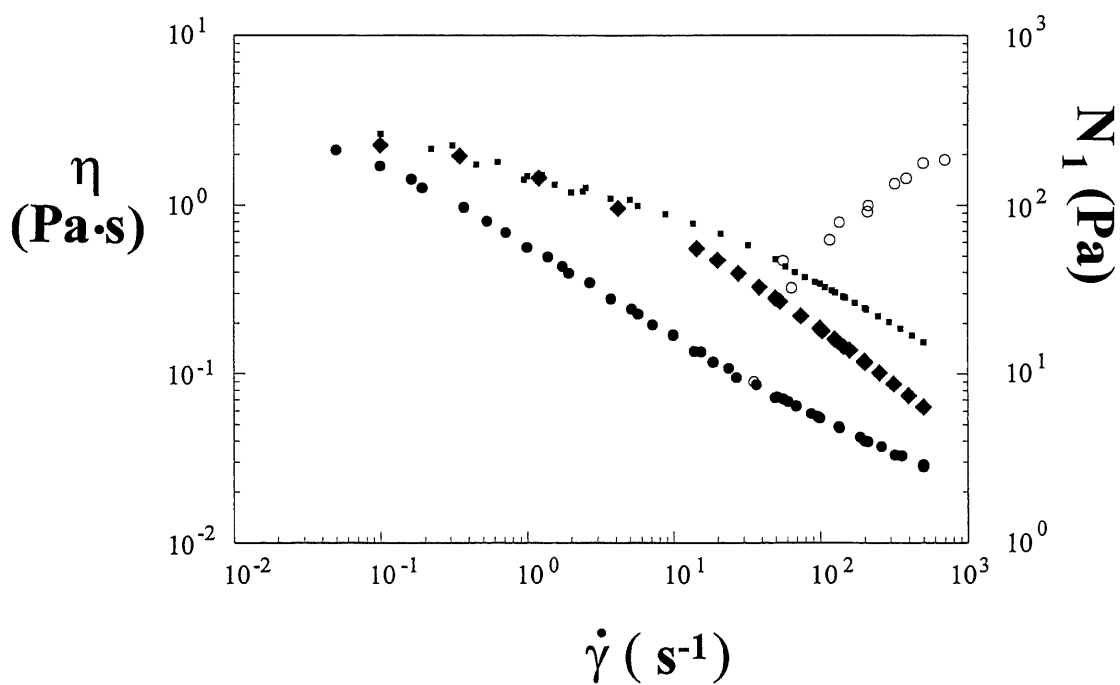


Figure 3.3 Courbes rhéologiques.  $\eta$ :  $\bullet$  : 0.10 PAA,  $\blacklozenge$  : 1 GEL,  $\blacksquare$  : 1 CMC.  $N_1$  :  $\circ$  : 0.10 PAA.

TABLEAU 3.1 PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES FLUIDES TESTÉS EN FONCTION DE LA CONCENTRATION DE SDS AJOUTÉE (ppm).

Fluide (-)	Densité (kg/m <sup>3</sup> )	Tension de surface (mN/m)								
		0	12.5	30	50	100	200	300	400	500
92 GLY	1238	66.3	-	56.5	-	-	-	49.1	-	-
95 GLY	1245	68.7	-	63	-	-	-	48.2	-	-
99 GLY	1254	65.8	-	60.3	-	-	-	53.2	-	-
1 CMC	1001	72.5	-	-	-	50.3	44	-	29.2	27.7
1 GEL	1002	65.2	-	-	54.2	50.3	43.2	-	37	-
3 PEO	1128	56.8	56	-	49.7	46.8	-	-	-	-
0.075 PAA	1126	69	-	60.5	-	51	-	38.3	-	-
0.10 PAA	1124	69	-	-	60.8	58.1	50.5	42	-	-
0.15 PAA	1125	66	64	55.1	-	56	-	35.6	-	-
0.20 PAA	1127	65.2	-	60.5	-	54	-	42.5	-	-
0.25 PAA	1127	62.3	62	54.5	-	54.1	-	44.3	-	-



### 3.4 Résultats

Les Figures 3.4-6 montrent que la vitesse des bulles diminue lorsque la concentration en surfactant augmente pour les fluides newtoniens. Mais il existe un volume où cet effet semble disparaître. Pour toutes les solutions de glycérine, aucune déformation n'est remarquée. Le volume pour lequel l'influence du surfactant devient négligeable (les courbes coïncident) se situe entre 10 et 100  $\mu\text{L}$  dépendant de la concentration en glycérine. Plus la concentration en glycérine est faible, plus élevé est le volume critique. Ceci revient à dire que la vitesse est plus affectée lorsque la viscosité est faible. Cette observation supporte l'idée d'une augmentation du transfert de masse par diffusion à l'interface dans le cas où la viscosité du milieu extérieur est faible.

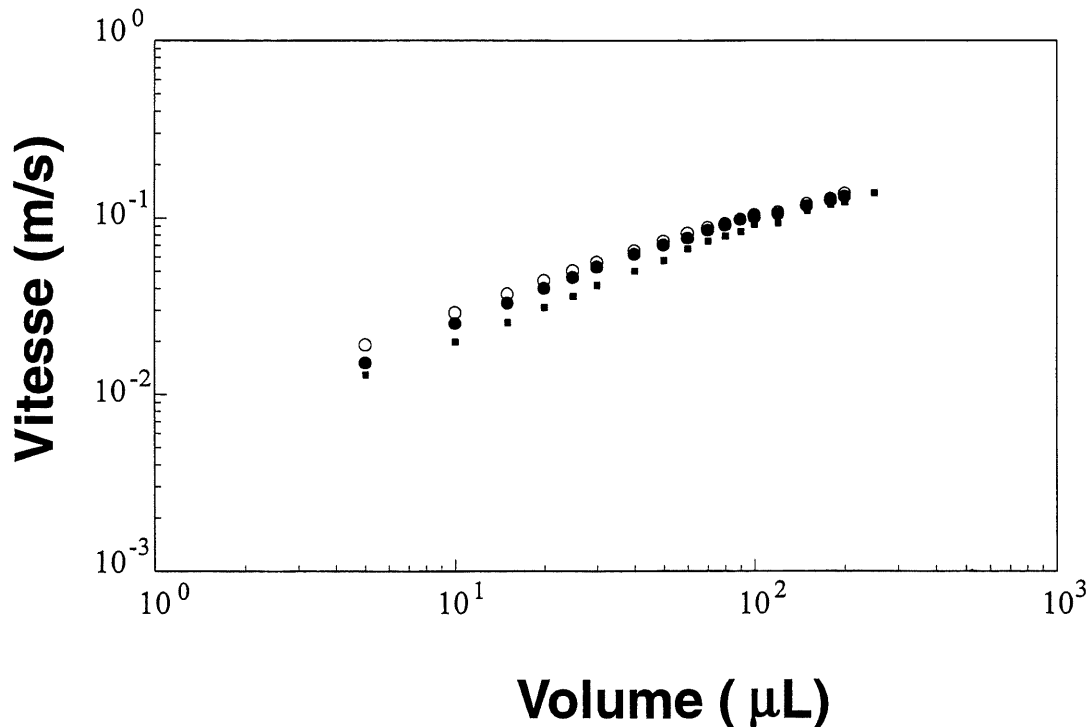


Figure 3.4

Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 92 GLY. o : 0 ppm, • : 30 ppm, ■ : 300 ppm.

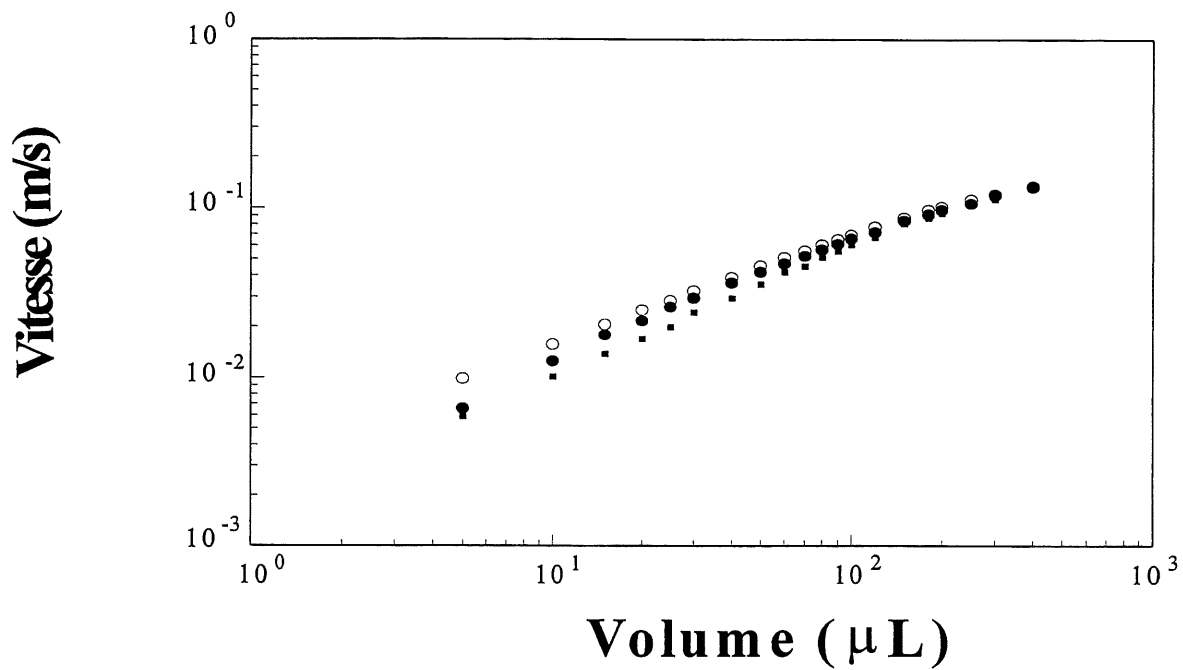


Figure 3.5

Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 95 GLY. o : 0 ppm, • : 30 ppm, ■ : 300 ppm.

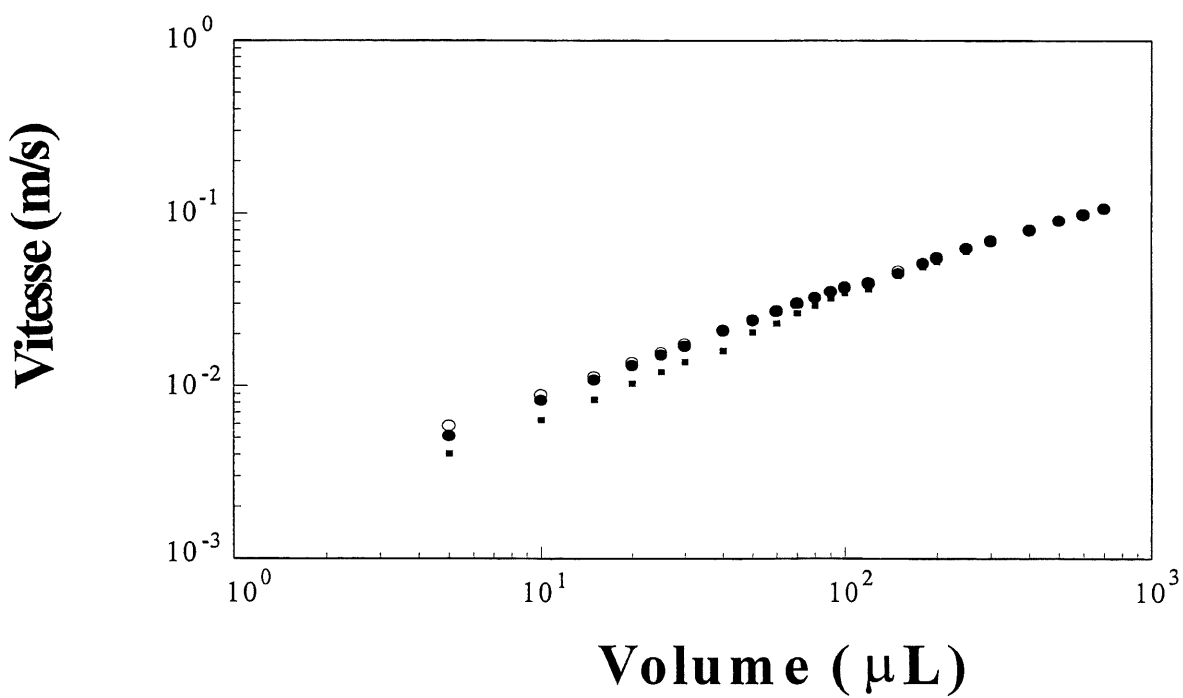


Figure 3.6

Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 99 GLY. o : 0 ppm, • : 30 ppm, ■ : 300 ppm.

Les Figures 3.7-9 montrent une diminution similaire de la vitesse de la bulle en fonction de l'augmentation de la concentration de SDS pour les fluides pseudoplastiques. Dans ces cas, en comparant les courbes avec et sans surfactant, on remarque trois régions différentes. Pour des bulles ayant des faibles rayons, la surface de celles-ci est aussi faible et une quantité minime de surfactant est suffisante pour avoir un effet prononcé sur la vitesse. C'est pour cette raison que les très petites bulles se comportent comme des sphères rigides car un liquide pure (0 % de contaminant) est pratiquement impossible à obtenir et des traces d'impuretés sont toujours présentes. Dans cette région du graphique, l'addition de surfactant a un effet négligeable sur la vitesse car l'interface est déjà immobilisée. A mesure que le rayon de la bulle augmente, les effets de surface se font sentir sur la vitesse. Dans cette région, l'addition de surfactants modifie les conditions à l'interface. Alors cette addition immobilise une plus grande partie de la surface, ce qui influence la vitesse de la bulle. Mais pour de grands volumes, les bulles se déplacent à plus grandes vitesses et une plus grande surface est exposée au fluide. Le taux de diffusion du surfactant n'est pas suffisant pour une immobilisation complète et les effets du surfactant ne sont discernables d'une concentration à l'autre. Ceci est consistant avec les observations de De Kee et coll.(1996).

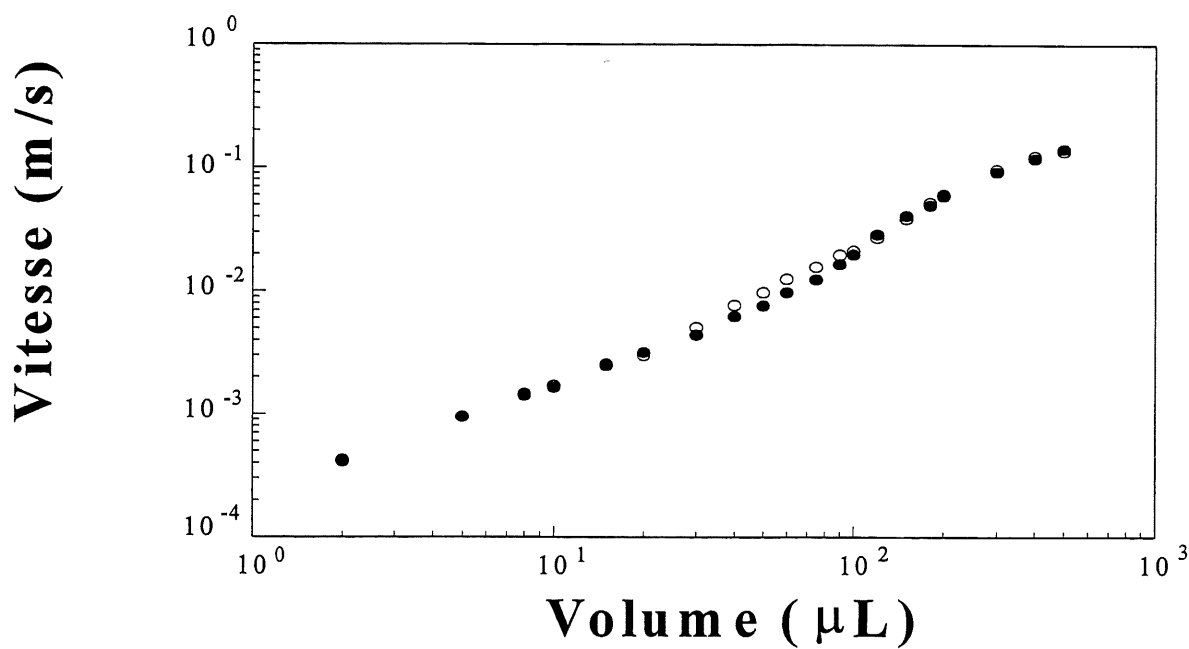


Figure 3.7

Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 1 GEL. o : 0 ppm, • : 100 ppm.

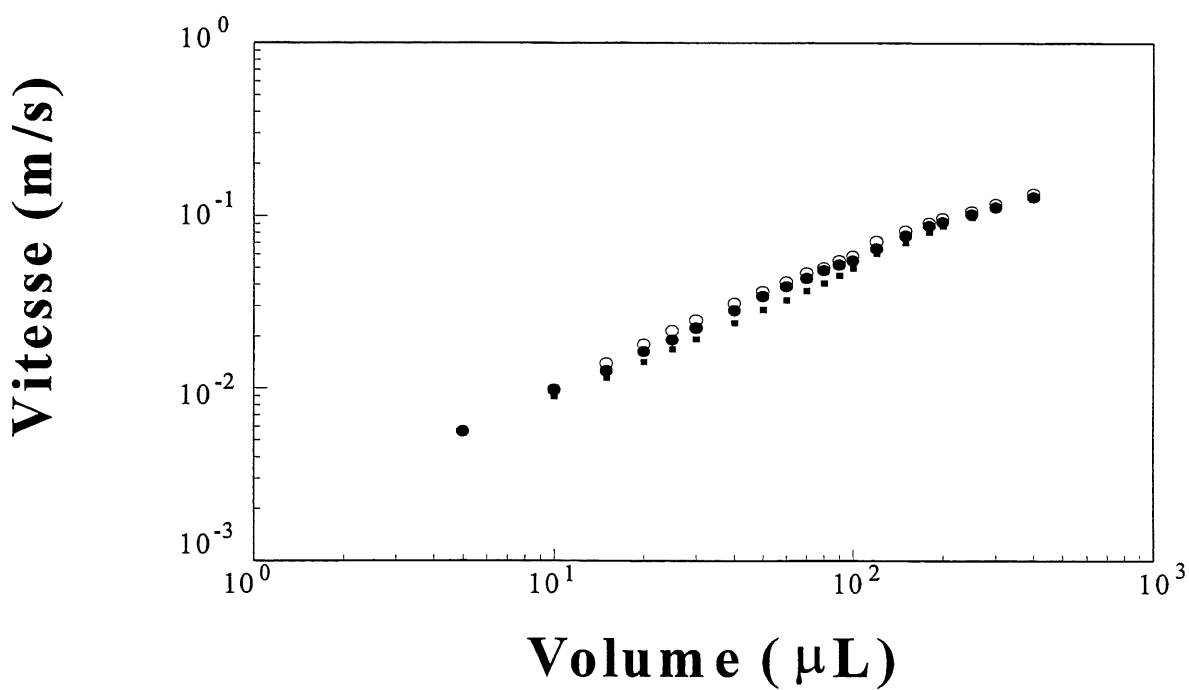


Figure 3.8

Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 3 PEO. o : 0 ppm, • : 12.5 ppm, ■ : 100 ppm.

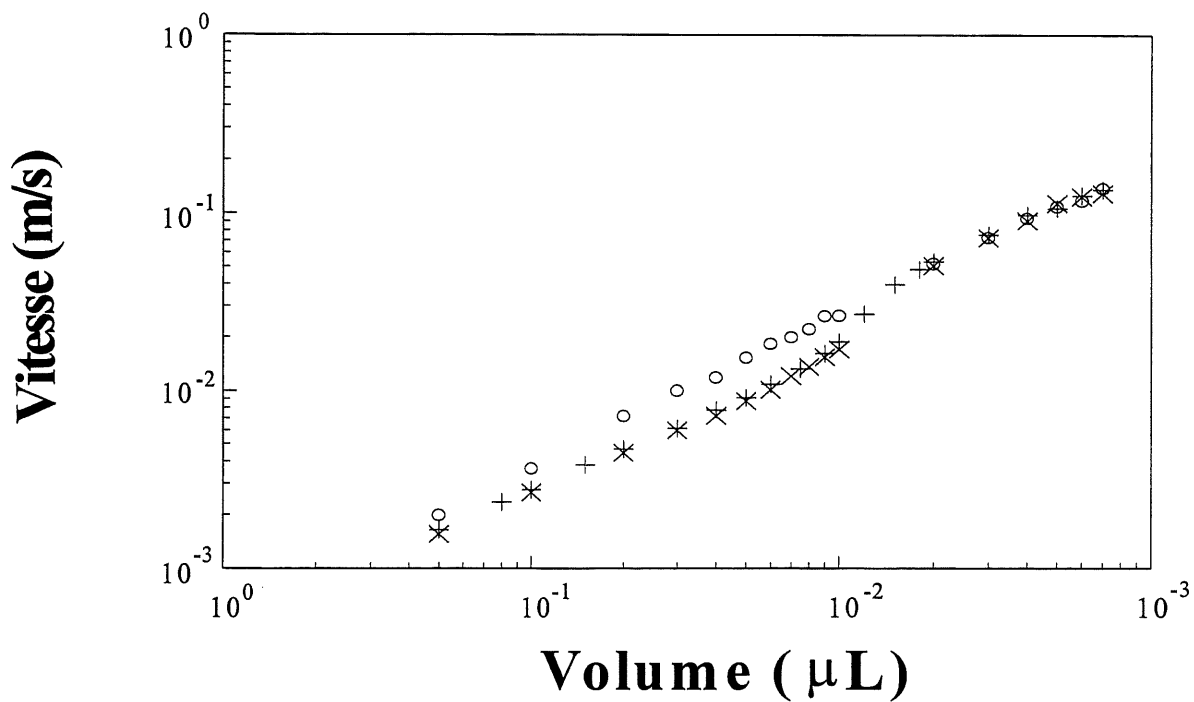


Figure 3.9 Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 1 CMC. o : 0 ppm, + : 100 ppm,  $\times$  : 500 ppm.

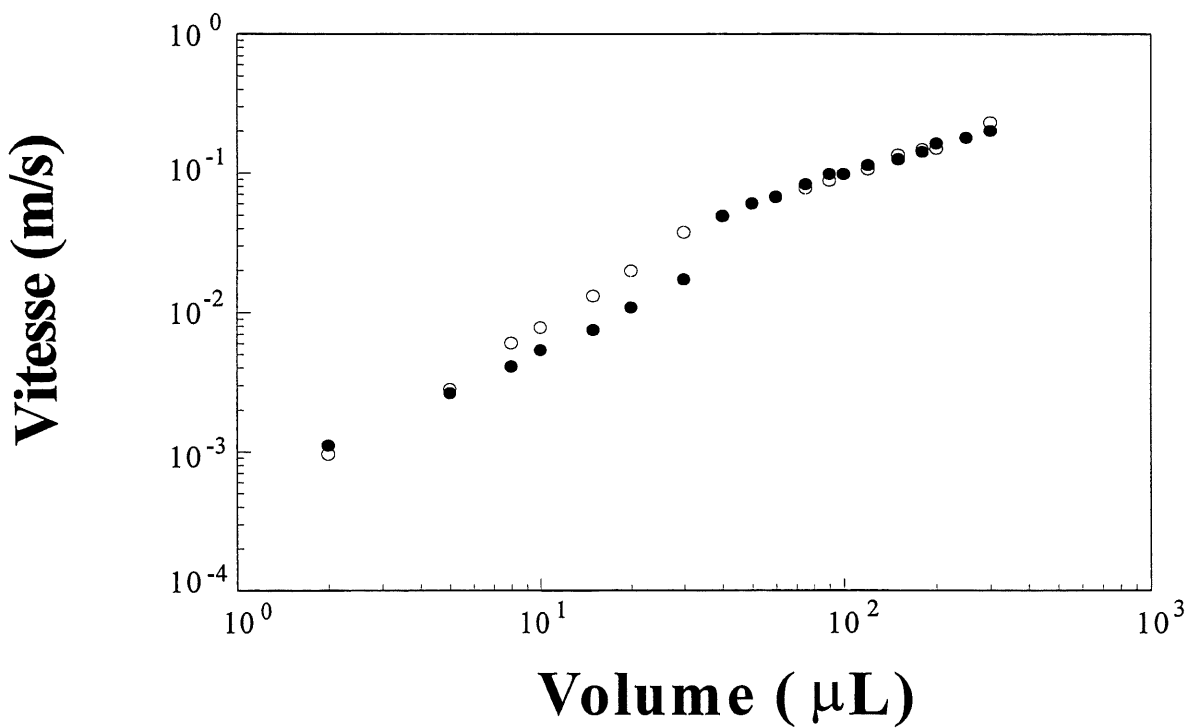


Figure 3.10 Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 0.10 PAA. o : 0 ppm,  $\bullet$  : 100 ppm.

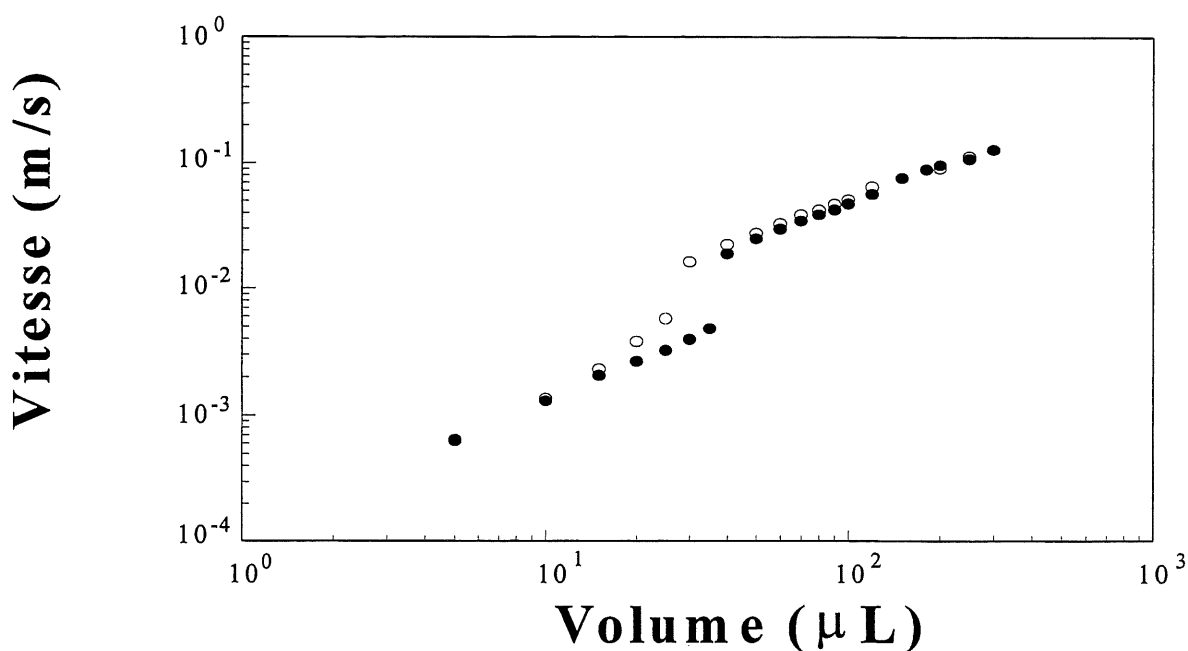


Figure 3.11 Vitesse en fonction du volume et de la concentration de SDS pour la solution 0.25 PAA. o : 0 ppm, • : 100 ppm.

Les Figures 3.10-11 montrent un comportement différents pour les fluides viscoélastiques. Nous pouvons observer des discontinuités dans les courbes! Ce phénomène sera discuté plus en détails au chapitre 5.

### 3.5 Discussion

Les Figures 3.4-6 indiquent que la présence de surfactant diminue la vitesse de la bulle. Cet effet est moins important pour les fluides plus visqueux. Le transfert de masse à l'interface liquide-gaz est une fonction de la vitesse interfaciale et cette vitesse dépend de la viscosité de la solution et ceci affecte la distribution de surfactant ainsi que la quantité absorbée. Comme résultat final, la

circulation interne est retardée et les effets des impuretés sur la vitesse de la bulle diminuent en fonction de l'augmentation de la viscosité du milieu extérieure.

Les Figure 3.7-11 montrent la relation entre la vitesse de la bulle en fonction de son volume pour différents fluides. On y voit que la vitesse est peu affectée par les impuretés lorsque son volume est faible. Dans cette région de la courbe, les bulles se comportent comme des sphères rigides et suivent la loi de Stokes principalement dû au fait qu'il y a toujours présence de traces d'impuretés. Le volume pour lequel ceci ne s'applique plus dépend de la solution elle-même. Il est une fonction de la tension de surface, de la viscosité, de la densité et de l'élasticité. Nous allons y revenir plus loin.

## 4. CORRÉLATIONS POUR FLUIDES PSEUDOPLASTIQUES

### 4.1 Revue de la littérature

Le mouvement d'une bulle seule dans un milieu infini composé d'une fluide newtonien est un problème qui a reçu une grande attention depuis fort longtemps. Au point de vue physique, nous pouvons approximer une bulle comme étant une goutte de viscosité nulle. Alors, le mouvement d'une goutte liquide dans un autre liquide, les deux étant immiscibles, a été étudié pour les cas de fluides newtoniens en écoulement à faibles nombres de Reynolds par Happel et Brenner (1991). Un grand nombre de recherches ont été effectuées sur le sujet et les principaux résultats sont disponibles dans Clift et coll.(1978).

Comme mentionné par Levich (1962), la vitesse d'une bulle est affectée par la présence de surfactants. Ceux-ci induisent des gradients de tension de surface par effet Marangoni. La circulation à l'interface a tendance à concentrer le surfactant à l'arrière de la bulle lorsque le mouvement est lent. Ce transport peut être équilibré par la diffusion moléculaire de surface et par l'échange de molécules avec le milieu extérieur. Cet échange est le produit d'une absorption à l'avant de la bulle et d'une désorption à l'arrière. Ceci peut être opposé à la diffusion dans le milieu extérieur et à des cinétiques d'absorption-désorption. Newman (1967) a démontré que la diffusion à la surface, la diffusion dans le milieu extérieur et la cinétique d'absorption pouvaient être traitées de façon simultanée. De cette façon, des coefficients de retard peuvent être calculés dans le but de corriger la vitesse de la bulle pour la présence de surfactants et ainsi évaluer



l'importance relative de chacun des modes de transfert. Une revue des principaux travaux disponibles sur le mouvement d'une bulle seule dans un liquide newtonien contaminé a été récemment publiée par Karamanev (1994).

Dans le cas de fluides viscoélastiques, deux phénomènes intriguent encore les chercheurs. L'un d'eux est l'effet Uebler. Metzner (1967) a observé qu'une bulle pouvait en venir à un arrêt complet dans un écoulement en contraction seulement si le fluide était viscoélastique. Le second phénomène est la possibilité d'observer une discontinuité dans la représentation graphique de la vitesse d'une bulle en fonction de son volume sur échelles log-log. Ces deux phénomènes semblent être reliés à l'élasticité du fluide, mais aucune explication n'est disponible pour l'instant dans les deux cas.

Il existe plusieurs façons de caractériser une bulle se déplaçant dans un milieu infini. Une excellente revue des résultats expérimentaux et théoriques sur le sujet est disponibles dans Chhabra (1988). Plusieurs auteurs rapportent des corrélations pour le coefficient de friction. De Kee et Carreau (1993) ont prédit celui-ci pour des fluides suivant le modèle de Carreau (1972) et le modèle de Cross (1965). Comme il existe un grand nombre de modèles disponibles afin de représenter le caractère non-newtonien du fluide, il existe un nombre proportionnel de corrélations afin de prédire le coefficient de friction. Généralement, chacune de ces corrélations est valide seulement dans certains cas spécifiques ou intervalle restreint, et aucune équation générale existe pour le moment afin de traiter de façon complète le cas viscoélastique.

A partir de ceci, il est bien connu que la dynamique d'une bulle est affectée par la présence d'impuretés. Par exemple, Elzinga et Banchemo (1961) ont découvert qu'une faible quantité de surfactant (0-180 ppm) n'avait aucune influence sur la viscosité, sur la densité et même sur la tension de surface, mais avait un effet dramatique sur la vitesse et sur le transfert de masse. L'effet causé par les molécules de surfactant est d'abaisser la tension de surface. Comme expliqué par Ohlendorf et coll.(1986), ces molécules possèdent une tête hydrophilique et une tête hydrophobique. Lorsqu'ils sont en solution, ils tendent à s'assembler en agrégat si leur concentration est supérieure à la concentration micellaire critique (cmc). La cmc dépend de plusieurs facteurs comme la longueur de la molécule, la nature du solvant, la concentration de sels dissous, la température, etc. En fonction de ces différents facteurs, les agrégats présentent différentes formes. Pour des concentrations supérieures à la cmc, des phénomènes comme la transition de phase induite par cisaillement ont été observés: Ohlendorf et coll.(1986), Rehage et coll.(1986), Wunderlich et Brunn (1989) et Vorwerk et Brunn (1994).

Comme mentionné par Holbrook et LeVan (1983b) et LeVan et Holbrook (1989), la solution numérique et théorique pour la vitesse d'une bulle seule dans un milieu infini contenant du surfactant peut se diviser en quatre types de solutions asymptotiques: non-retardé, uniformément retardé, calotte sphérique et complètement immobilisé. Les solutions sont asymptotiques car les équations de transfert de momentum et de masse ont été découplées afin de résoudre a priori le profil de vitesse pour ensuite calculer le profil de concentration. Ceci est effectué en posant a priori un profil de vitesse. La solution non retardée est obtenue par une méthode de perturbation de la solution d'Hadamard-Rybczynski ou de Boussinesq dans le cas où la quantité de

contaminant dans le milieu continu est infinitésimale. Cette hypothèse a été employée par: Wasserman et Slattery (1969), Saville (1973), Harper (1974), LeVan et Newman (1976), Agrawal et Wasan (1979) et Harper (1982). La solution retardée uniformément est obtenue en posant que la vitesse diminue de façon continue sur toute la surface de la bulle. Cette hypothèse a été utilisée par: Levich (1962), Schechter et Farley (1963), Newman (1967), Holbrook et LeVan (1983a,b) et LeVan et Holbrook (1989). L'approximation de la calotte sphérique repose exclusivement sur la dynamique du problème et aucun transfert de masse n'est considéré. Des corrélations ont été obtenues par cette hypothèse par: Savic (1953), Griffith (1962), Davis et Acrivos (1966), Harper (1973), Holbrook et LeVan (1983a,b), Sadhal et Johnson (1983), LeVan et Holbrook (1989), Quintana (1990) et He et coll.(1991). Finalement, la solution complètement immobilisée est obtenue en assumant l'interface comme étant complètement immobile pour résoudre le transfert de masse. Le profil de vitesse de Stokes est donc utilisé comme par Griffith (1962) et par Saville (1973).

La quantité de surfactant présent à la surface de la bulle dépend du mécanisme par lequel le surfactant est absorbé, ce qui détermine par la suite la surface couverte dans le cas de la calotte sphérique. A cette surface correspond un angle. La valeur de cet angle peut être mesurée expérimentalement. Une façon de le faire est d'utiliser les méthodes de visualisation et la photographie comme l'ont fait: Savic (1953), Elzinga et Banchemo (1961), Horton et coll.(1965) et Beitel et Heideger (1971). Une autre façon de l'évaluer, est à partir de différentes hypothèses sur le transfert de masse à l'interface de façon théorique comme: Griffith (1962), Davis et Acrivos (1966), Harper (1973,1974,1982), Sadhal et Johnson (1983), Holbrook et LeVan (1983a,b),

LeVan et Holbrook (1989), Quintana (1990) et He et coll.(1991). Ces études révèlent que pour un fluide newtonien, la valeur de l'angle que forme la calotte sphérique est une fonction de différents nombres adimensionnels comme les nombres de: Péclet, Sherwood, Eötvös, Biot, Marangoni, Damkholer, etc. A notre connaissance, il existe peu de ce genre d'étude dans le cas où le milieu est non-newtonien. Seulement Kawase et Ulbrecht (1981,1982), Quintana et coll.(1992) et Quintana (1992) sont disponibles pour le moment. On peut donc voir un certain manque à ce niveau.

Dans le cas où la bulle possède un volume faible, la déformation peut être négligée et la forme est parfaitement sphérique. Dans le cas où le volume est plus élevé, la forme de la bulle n'est plus sphérique et la déformation affecte la valeur du coefficient de friction. Yamamoto et Ishii (1987) ont mesuré la vitesse et la forme de bulles d'air dans de l'eau avec et sans surfactants. Ils ont découvert que les surfactants avaient une faible influence sur la vitesse, mais changeaient le coefficient de friction de façon appréciable. Ce phénomène fut attribué à la déformation de la bulle en réponse à l'équilibre de forces à l'interface liquide-gaz. Suite à ceci, Geary et Rice (1991) ont déterminé expérimentalement une relation pour la déformation de bulles de formes ellipsoïdes en fonction du nombre de Tadaki. Gonzalez-Tello et coll.(1992) ont aussi étudié expérimentalement le mouvement de gouttes et ont observé une similarité avec le cas de bulles: la vitesse diminue avec une augmentation de la concentration de surfactant. La magnitude de la diminution était une fonction de la nature chimique de la molécule de surfactant.

Dans le cas de fluides non-newtoniens, encore une fois peu de travaux sont disponibles pour le moment. Kawase et Ulbrecht (1981,1982) ont utilisé l'approximation de la retardation uniforme pour des fluides suivant le modèle de la loi de puissance. Quintana et coll.(1992) ont utilisé une méthode de perturbation sur un modèle de fluide du deuxième ordre pour de faibles nombres de Weissenberg. Finalement, Quintana (1992) a revu les différentes approximations utilisées dans le cas de fluides newtoniens et non-newtoniens. Tous les travaux concordent sur un point: la présence d'une faible quantité de surfactant diminue la vitesse terminale d'ascension de bulle seule en milieu infini.

Nous allons nous intéresser ici à la mesure de vitesse de bulles d'air dans des fluides présentant des caractères rhéologiques différents (newtoniens, pseudoplastiques et viscoélastiques), et ce à différentes concentrations de surfactant afin de réduire l'écart existant pour l'instant dans la compréhension des forces entrant en jeu. Ceci nous permettra de comparer entre eux les fluides newtoniens et non-newtoniens.

## 4.2 Équations mathématiques

Afin de calculer la vitesse d'ascension de la bulle, nous allons utiliser un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  avec l'origine située au centre de la bulle, laquelle est considérée comme étant sphérique. Comme première analyse, la déformation est négligée a priori dans le but de simplifier les calculs. L'écoulement autour de la bulle est considéré comme étant lent, incompressible, axisymétrique et en régime permanent. Le milieu extérieur est considéré ici comme étant pseudoplastique et inélastique. Dans ce cas, nous pouvons utiliser le modèle de Carreau (1972). Sous ces conditions, les équations à résoudre sont:

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla p = -\nabla \cdot \underline{\tau} \quad (4.2)$$

$$\underline{\tau} = -\eta_o \left[ 1 + \lambda^2 \left( \frac{II}{2} \right) \right]^{\frac{n-1}{2}} \dot{\underline{\gamma}} \quad (4.3)$$

où  $p$  est la pression,  $\underline{\tau}$  est le tenseur des contraintes,  $\eta_o$ ,  $\lambda$  et  $n$  sont les paramètres du modèle de Carreau et  $II$  est le deuxième invariant du tenseur des taux de déformation  $\dot{\underline{\gamma}}$ . Sa définition est:

$$II = \dot{\underline{\gamma}} : \dot{\underline{\gamma}} \quad (4.4)$$

Dans le but de simplifier les calculs, on introduit ici la fonction de courant  $\Psi$  de la façon suivante:

$$v_r = \frac{-1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (4.5)$$

$$v_{\theta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (4.6)$$

On définit ensuite le nombre Carreau comme suit:

$$Cu = \frac{\lambda U_{\infty}}{R} \quad (4.7)$$

où  $U_{\infty}$  est la vitesse loin de la bulle et  $R$  est son rayon. Afin d'obtenir une solution analytique des équations 4.1 à 4.3, nous allons chercher une solution dans la limite où  $Cu \rightarrow 0$ . En éliminant la pression dans l'Equ.(4.2), l'équation à résoudre devient à l'ordre de  $Cu^2$ :

$$E^4 \Psi + Cu^2 \left( \frac{R}{U_{\infty}} \right)^2 H E^4 \Psi = Cu^2 \left( \frac{R}{U_{\infty}} \right) \left( \frac{n-1}{2} \right) \sin \theta L(r, \theta) \quad (4.8)$$

où

$$\begin{aligned} L(r, \theta) = & \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{\theta}}{r} \right) + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{H}{2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_{\theta}}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{H}{2} \right) \\ & + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} E^2 \Psi \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{H}{2} \right) \\ & + \left( r \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} E^2 \Psi \right) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{H}{2} \right) + \frac{2}{r} \left( \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + v_r - r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{H}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

et

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (4.10)$$

Dans ces conditions, une méthode de perturbation est alors utilisée pour obtenir une approximation de la fonction de courant. A ce point, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires afin de modéliser le transfert de masse des molécules de surfactant. Le surfactant est considéré ici comme étant insoluble dans l'intérieur de la bulle. L'influence des surfactants est de

diminuer la circulation à l'interface par des gradients de tension de surface (contraintes de Marangoni). Deux modèles seront étudiés ici soit le modèle de la calotte sphérique et le modèle de la distribution continue.

### 4.3 Modèle de la calotte sphérique

Dans le modèle de la calotte sphérique, les molécules de surfactants absorbées à l'interface sont transportées vers le point de stagnation arrière de la bulle par un mouvement de convection due aux contraintes de cisaillement. Ces molécules s'accumulent en cet endroit pour former une calotte dont l'angle est de  $\pi - \alpha$  comme illustré sur la Figure 4.1. Cette limite représente le cas où la diffusion de surface peut être négligée par rapport au transport par convection. Ceci correspond à un nombre de Péclet élevé:  $Pe = \frac{U_\infty R}{D_s} \rightarrow \infty$ , où  $D_s$  est le coefficient de diffusion de surface du surfactant. Les conditions frontières associées à cette hypothèse sont: pour la surface ( $r = R$ ):

$$v_r = 0 \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (4.11)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad 0 \leq \theta < \alpha \quad (4.12)$$

$$v_\theta = 0 \quad \alpha < \theta \leq \pi \quad (4.13)$$

Une dernière condition frontière est nécessaire afin de déterminer complètement le problème. Il s'agit de la condition d'écoulement libre à l'infini:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Psi = -\frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (4.14)$$



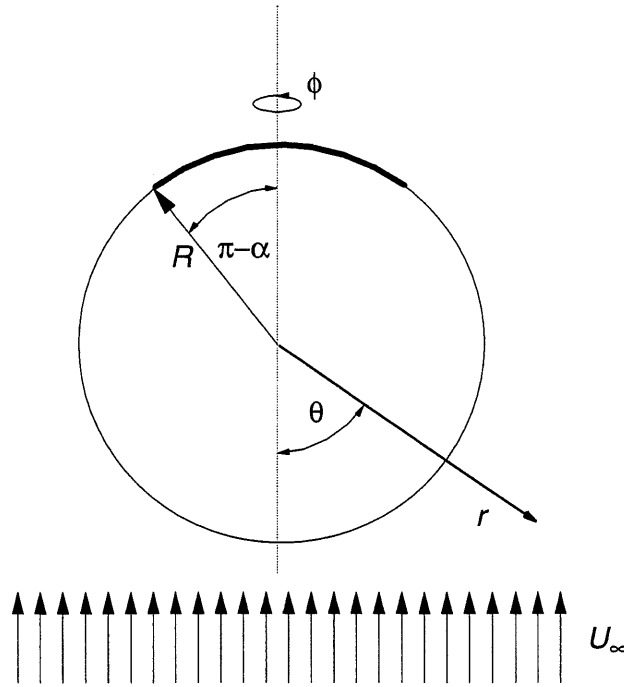


Figure 4.1      Système de coordonnées utilisé.

#### 4.3.1 Solution à l'ordre zéro

A l'ordre zéro, l'équation à résoudre correspond au cas newtonien:

$$E^4 \Psi_o = 0 \quad (4.15)$$

La solution générale de l'Equ.(4.15) est donné par Savic (1953) comme étant:

$$\Psi_o = \sum_{i=2}^{\infty} (A_i r^i + B_i r^{1-i} + C_i r^{i+2} + D_i r^{3-i}) G_i(\cos \theta) \quad (4.16)$$

où  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $D_i$  sont des constantes d'intégration et  $G_i(\cos \theta)$  est le polynôme de Gegenbauer de degré  $-1/2$  et d'ordre  $i$ . A partir des Eqs.(4.5,6 et 14), on obtient:

$$A_2 = -U_\infty \quad A_i = 0 \quad (i \geq 3) \quad (4.17)$$

$$C_i = 0 \quad (\forall i) \quad (4.18)$$

En utilisant les Eqs.(4.5,6 et 11), une relation entre le  $B_i$  et les  $D_i$  est obtenue:

$$D_2 = RU_\infty - B_2 R^{-2} \quad (4.19)$$

$$D_i = -B_i R^{-2} \quad (4.20)$$

La fonction de courant peut donc s'écrire comme:

$$\Psi_o = \left( -U_\infty r^2 + U_\infty r R + \frac{B_2}{r} - \frac{B_2 r}{R^2} \right) G_2(y) + \sum_{i=3}^{\infty} B_i (r^{1-i} - R^{-2} r^{3-i}) G_i(y) \quad (4.21)$$

où  $y = \cos \theta$ . Dans le but de déterminer les constantes  $B_i$ , on remarque la possibilité de transformer l'Equ.(4.12) à l'ordre zéro en:

$$v_\theta = r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad 1 \leq y < \cos \alpha \quad (4.22)$$

En évaluant  $v_\theta$  par les Equ.(4.6 et 21), on multiplie le résultat par  $\frac{G_j}{\sin \theta}$  en on intègre sur toute la surface de la bulle. Ceci requiert de diviser les intégrales sur les deux régions de la surface. Ceci revient à intégrer par rapport à  $y$  de -1 à  $\cos \alpha$  et de  $\cos \alpha$  à 1 sur la surface de la bulle. De cette façon, on obtient:

$$\begin{aligned} & - \int_{-1}^1 \left( U_\infty + \frac{2}{R^3} B_2 \right) \frac{G_2 G_j}{1-y^2} dy - 2 \int_{-1}^1 \sum_{i=3}^{\infty} B_i R^{-i-1} \frac{G_i G_j}{1-y^2} dy \\ & = \left( -U_\infty + \frac{4}{R^3} B_2 \right) M_{ij} + 4 \sum_{i=3}^{\infty} B_i R^{-i-1} M_{ij} \end{aligned} \quad (4.23)$$

où pour simplifier la notation, nous avons substituer:

$$\int_{\cos \alpha}^1 \frac{G_i G_j}{1-y^2} dy = M_{ij} \quad (4.24)$$

Pour évaluer les intégrales, nous pouvons utiliser les propriétés orthogonales des polynômes de Gegenbauer comme suit:

$$\int_{-1}^1 \frac{G_i G_j}{1-y^2} dy = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{1}{i(i-1)(i-\frac{1}{2})} & i = j \end{cases} \quad (4.25)$$

Finalement, par l'Equ.(4.11), on note que:

$$\int_{-1}^{\cos \alpha} \frac{G_i G_j}{1-y^2} dy = 0 \quad (4.26)$$

L'équation (4.23) est un système d'équations qu'il faut résoudre afin de calculer les dernières constantes  $B_i$ . La force totale sur la bulle est calculée par :

$$F = -2 \pi R^2 \int_0^\pi (\tau_{rr} + p)_{r=R} \sin \theta \cos \theta d\theta + 2 \pi R^2 \int_0^\pi (\tau_{r\theta})_{r=R} \sin^2 \theta d\theta \quad (4.27)$$

L'évaluation des intégrales nous donne à l'ordre zéro:

$$F_o = 4 \pi R U_\infty \eta_o \left( 1 - \frac{B_2}{U_\infty R^3} \right) \quad (4.28)$$

En résolvant le système donné par l'Equ.(4.23), on obtient la valeur de  $B_2$  en fonction de l'angle de la calotte  $\alpha$ . Les deux cas limites sont:

$$\text{i) la sphère rigide } (\alpha = 0): \quad B_2 = -\frac{1}{2}U_{\infty}R^3 \quad (4.29a)$$

$$\text{ii) la bulle non-contaminée } (\alpha = \pi): \quad B_2 = 0 \quad (4.29b)$$

Ces dernières étant les cas limites pour les fluides newtoniens. Afin d'obtenir une bonne approximation, Savic (1953) a tronquée l'Equ.(4.21) à  $i = 7$ .

### 4.3.2 Solution à l'ordre deux

A l'ordre deux, l'équation à résoudre devient:

$$E^4 \Psi_1 = -\left(\frac{n-1}{2}\right) \sin \theta L(\Psi_0) \quad (4.30)$$

La solution homogène de l'Equ.(4.30) est toujours de la forme de l'Equ.(4.16):

$$\Psi_1 = \sum_{i=2}^{\infty} (A'_i r^i + B'_i r^{1-i} + C'_i r^{i+2} + D'_i r^{3-i}) G_i(\cos \theta) \quad (4.31)$$

Pour réussir à évaluer analytiquement le côté droit de l'Equ.(4.30), nous avons utilisé le logiciel de calcul symbolique MAPLE V R3. La solution particulière a donc été calculée par la méthode de variation de paramètres. Les détails des calculs sont disponibles dans Rodrigue et coll.(1996).

De la même façon que pour la solution à l'ordre zéro, la solution à l'ordre deux nous donne:

$$F_1 = 4 \pi R U_{\infty} \eta_o \Xi \quad (4.32)$$

où  $\Xi$  est une fonction de  $\alpha$ . La force totale agissant sur la bulle est donc:

$$F = F_o + (n-1) C u^2 F_1 \quad (4.33)$$

et les constantes  $B_i$  et  $B'_i$  doivent être évaluées pour chaque angle  $\alpha$ . En présence de surfactants dans le liquide, nous devons évaluer l'influence de leur concentration sur la vitesse de la bulle.

Ceci s'effectue ici par la mesure de la tension de surface. Sur la surface de la bulle, un bilan de forces tangentielle peut être fait. En négligeant les viscosités interfaciales, nous obtenons:

$$-\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}\right)_{r=R} = (\tau_{r\theta})_{r=R} \quad (4.34)$$

En intégrant cette équation, l'hypothèse de la calotte sphérique nous donne:

$$\Delta \sigma = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \int_{\pi}^{\alpha} (r \tau_{r\theta})_{r=R} d\theta \quad (4.35)$$

où  $\sigma_{\max}$  et  $\sigma_{\min}$  sont respectivement les valeurs de la tension de surface du liquide non-contaminé et du liquide contaminé. En connaissant  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  et  $\tau_{r\theta}$ , il est possible de calculer  $\alpha$ .  $\tau_{r\theta}$  est évaluée à l'aide du profil de vitesse. En définissant un nombre de Capillaire comme:

$$Ca = \left(\frac{\Delta \sigma}{\eta_o U_{\infty}}\right)^{-1} \quad (4.36)$$

il est possible de calculer la valeur de  $Ca^{-1}$  en fonction de  $\alpha$  par l'Equ.(4.35). L'équation résultante possède la même forme que l'Equ.(4.33):

$$Ca^{-1} = C_1 + (n-1)Cu^2C_2 \quad (4.37)$$

Les valeurs de  $C_1$  et  $C_2$  sont discutées dans la section 4.5.

#### 4.4 Distribution continue

Pour ce modèle, la variation de tension entre les deux points de stagnation est considérée comme étant continue. Ceci correspond à un échange rapide de surfactant entre la surface de la bulle et le milieu extérieur. Les conditions frontières à la surface de la bulle deviennent dans ce cas:

$$r \rightarrow \infty \quad \Psi \rightarrow -\frac{1}{2}U_{\infty}R \sin^2\theta \quad (4.38)$$

$$r = R \quad v_{r=0} \quad (4.39)$$

$$r = R \quad \tau_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \quad (4.40)$$

Pour pouvoir utiliser l'Equ.(4.40), nous devons connaître la variation de la tension de surface en fonction de l'angle  $\theta$ . On pose ici que la tension de surface est une fonction de la concentration surfacique ( $\Gamma$ ):  $\sigma = \sigma(\Gamma)$ . En supposant que pour de faibles concentrations de surfactants, la relation est du type gaz parfait, on obtient:

$$\sigma_o - \sigma = \tilde{R} T \Gamma \quad (4.41)$$

où  $\sigma_o$  est la tension de surface du liquide non-contaminé,  $T$  est la température absolue et  $\tilde{R}$  est la constante des gaz. A partir de l'Equ.(4.41), on peut réécrire la dérivée comme:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} = -\tilde{R} T \frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} \quad (4.42)$$

pour un système isotherme. La symétrie du problème nous permet de développer  $\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}$  en une série de puissance de  $\cos \theta$ . L'Equ.(4.40) peut être réécrite comme suit:

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos^n \theta \quad (4.43)$$

Dans le but simplicité, nous allons utiliser a priori le modèle linéaire et par la suite, pour amélioration, le modèle cubique et le modèle de puissance 5.

Dans le cas du modèle linéaire en  $y$  ( $= \cos \theta$ ), la tension de surface à l'interface est approximée à:

$$\sigma = a_1 + b_1 y \quad (4.44)$$

A partir de considérations physiques, nous posons que  $\sigma = \sigma_{\max}$  à  $y = 1$  et que  $\sigma = \sigma_{\min}$  à  $y = -1$ .

Les valeurs de  $a_1$  et  $b_1$  sont dans ce cas:

$$a_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \quad (4.45a)$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (4.45b)$$

Des modèles d'ordre supérieurs sont nécessaires afin de mieux représenter la concentration de surfactant à l'interface lorsque le transfert entre le milieu extérieur et la surface ne peut plus être considéré comme étant rapide et que les effets de diffusion de surface sont importants. Dans le cas du modèle cubique,  $\sigma$  est donné par:

$$\sigma = a_3 + b_3 y + c_3 y^2 + d_3 y^3 \quad (4.46)$$



En plus des conditions du modèle linéaire, nous ajoutons les conditions de symétrie aux points de stagnation:  $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = 0$  à  $y = \pm 1$ . Ceci nous donne:

$$a_3 = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) \quad (4.47a)$$

$$b_3 = \frac{3}{4}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (4.47b)$$

$$c_3 = 0 \quad (4.47c)$$

$$d_3 = -\frac{1}{4}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \quad (4.47d)$$

Dans le but d'améliorer encore plus l'approximation, des conditions supplémentaires peuvent être introduites pour le profil de tension de surface. Ceci mène au modèle d'ordre cinq. Dans ce cas, la fonction pour  $\sigma$  est:

$$\sigma = a_5 + b_5 y + c_5 y^2 + d_5 y^3 + e_5 y^4 + f_5 y^5 \quad (4.48)$$

En utilisant les mêmes conditions que pour le modèle cubique, on trouve que:

$$a_5 = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) + e_5 \quad (4.49a)$$

$$b_5 = \frac{3}{4}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + f_5 \quad (4.49b)$$

$$c_5 = -2e_5 \quad (4.49c)$$

$$d_5 = -\frac{1}{4}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) - 2f_5 \quad (4.49d)$$

Encore une fois, par des conditions physiques et de symétries, nous pouvons poser que  $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} < 0$  à  $y = -1$  et que  $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} > 0$  à  $y = 1$ . De plus, à partir de considérations physiques sur la vitesse tangentielle à la surface de la bulle,  $e_5$  et  $f_5$  doivent être positifs. Toutes ces conditions nous laissent avec un domaine D restreint de valeurs possibles pour ces deux constantes. Le résultat est représenté sur la Figure 4.2. Dans le but de calculer la force agissant sur la bulle, nous avons

toujours à résoudre les équations (4.27) de la même façon que pour le modèle de la calotte sphérique en remplaçant les conditions frontières par celles données par (4.38-40). Le résultat peut se mettre sous la forme de l'Equ.(4.33) avec:

$$F_o = 4\pi R U_\infty \eta_o (1 + K_3 Ca^{-1}) \quad (4.50)$$

$$F_1 = 4\pi R U_\infty \eta_o \left( \frac{4}{25} + K_4 Ca^{-1} + K_5 Ca^{-2} + K_6 Ca^{-3} \right) \quad (4.51)$$

où  $K_3$  -  $K_6$  sont des valeurs dépendantes du modèle utilisé pour représenter la tension de surface.

Ces valeurs sont discutées dans la section des résultats.

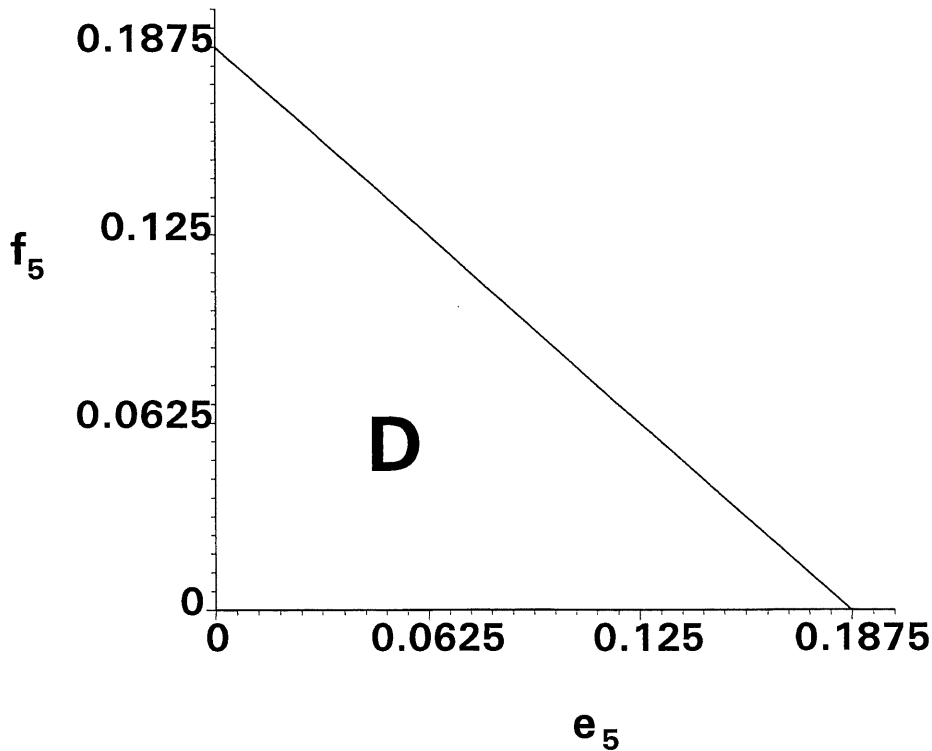


Figure 4.2      Domaine admissible pour les valeurs de  $e_5$  et de  $f_5$ .

## 4.5 Résultats

### 4.5.1 Calotte sphérique

Regardons en premier lieu, les cas limites. Dans le cas où le fluide est non-contaminé, la valeur de  $\Delta\sigma$  est nulle ( $\alpha = \pi$ ) et la force est donnée par:

$$F = 4 \pi R U_{\infty} \eta_o [1 + 0.1600 Cu^2(n-1)] \quad (4.52)$$

A la limite où la surface est complètement immobilisée,  $\alpha = 0$  et on trouve l'équation pour une sphère rigide:

$$F = 6 \pi R U_{\infty} \eta_o [1 + 0.0898 Cu^2(n-1)] \quad (4.53)$$

Pour les cas intermédiaires ( $0 < \alpha < \pi$ ), nous pouvons réécrire l'équation de la force sous la forme:

$$F = 4 \pi R U_{\infty} \eta_o [K_1 + K_2 (n-1)Cu^2] \quad (4.54)$$

Par un bilan de force sur la bulle, nous pouvons égaler la force de friction à la poussée d'Archimède:

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 g \Delta\rho \quad (4.55)$$

où  $\Delta\rho$  est la différence de densité entre le fluide et le gaz constituant la bulle et  $g$  est l'accélération gravitationnelle. Les équations (4.54-55) peuvent être combinées afin d'obtenir une équation cubique pour la vitesse cherchée:

$$U_{\infty}^3 + k_1 U_{\infty} + k_2 = 0 \quad (4.56)$$

où

$$k_1 = \frac{R^2 K_1}{\lambda^2 K_2 (n-1)} \quad (4.57a)$$

$$k_2 = -\frac{g R^4 \Delta\rho}{3\eta_o(n-1)\lambda^2 K_2} \quad (4.57b)$$

Connaissant la valeur de  $K_1$  et de  $K_2$ , nous pouvons résoudre (4.56) pour obtenir la vitesse de la bulle en fonction la contamination du fluide. Dans le cas où des surfactants sont présents dans le fluide, nous devons à priori évaluer la valeur de l'angle  $\alpha$  pour obtenir les valeurs de  $K_1$  et de  $K_2$ . Ceci est fait à partir de l'Equ.(4.35). Par la suite, les profils de vitesse sont calculés à partir des équations (4.21,31). Dans la limite de notre approximation, les valeurs de  $K_1$  et de  $C_1$  sont données par les Figures 4.3 et 4.4. Suivant Savic (1953), nous avons tronquée la série à  $i = 7$  pour la solution newtonienne. Ceci s'avère nous donner une assez mauvaise approximation pour le profil de vitesse interfaciale et cause de grandes erreurs et des oscillations pour la solution de la correction non-newtonienne. Cela a pour résultat de fournir des valeurs pour  $K_2$  et  $C_2$  qui semblent entachée d'erreur. Malgré tout, elles sont respectivement données dans les Figures 4.5 et 4.6.

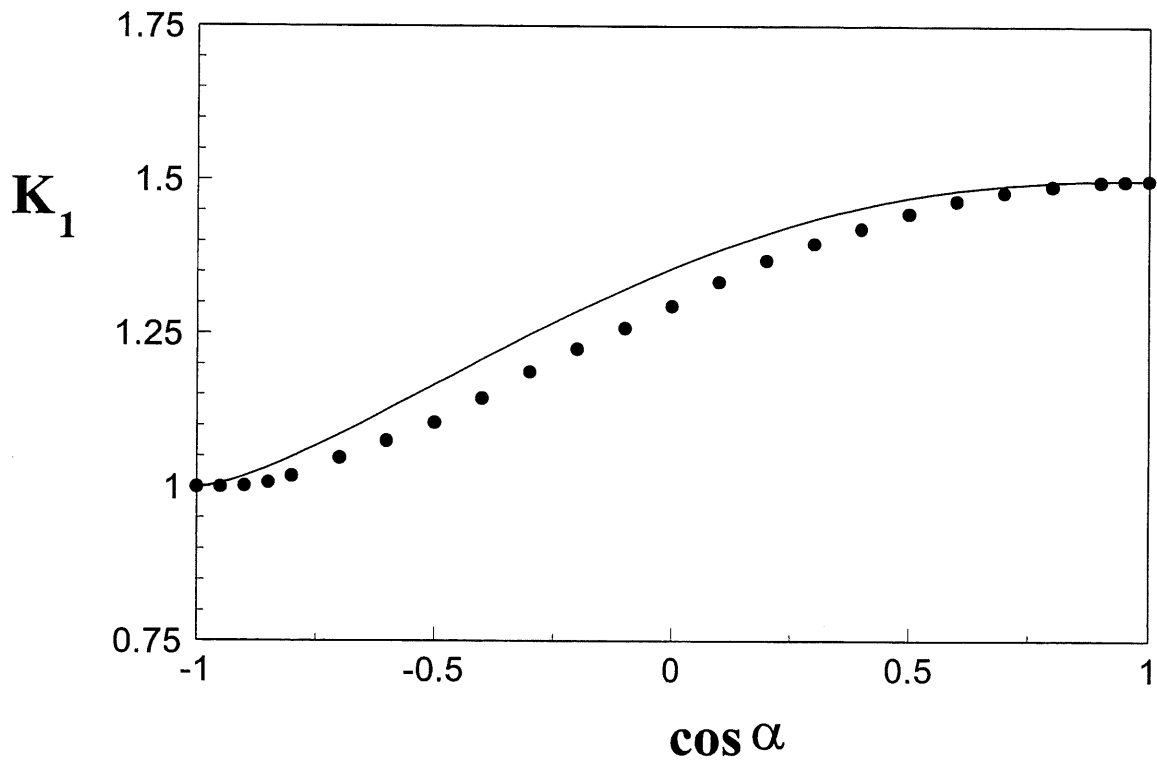


Figure 4.3 Valeurs calculées de  $K_1$  en fonction de  $\cos \alpha$ . — de l'Equ.(4.58).

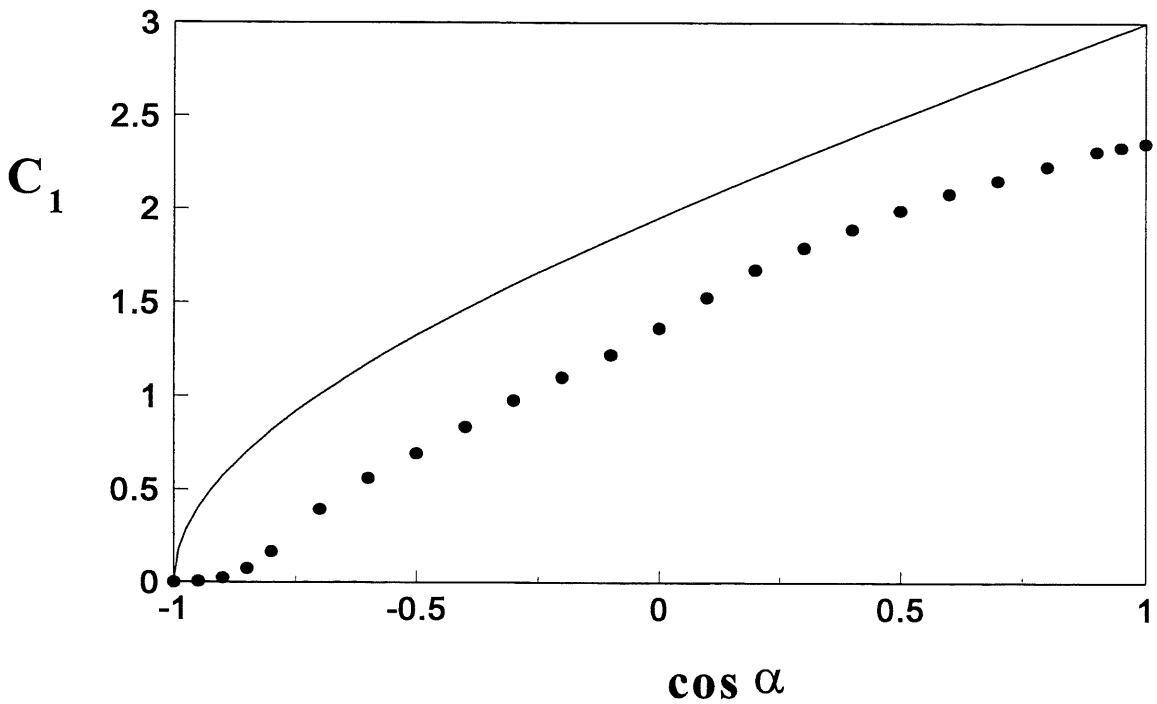


Figure 4.4 Valeurs calculées de  $C_1$  en fonction de  $\cos \alpha$ . — de l'Equ.(4.59).

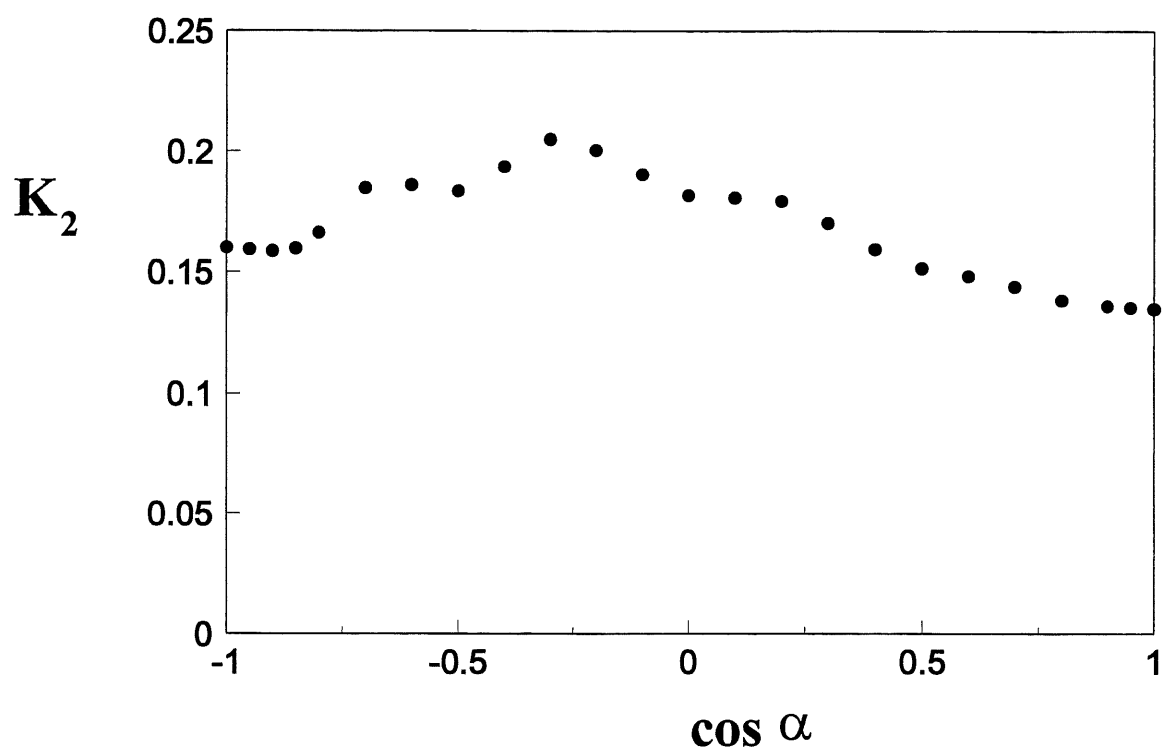


Figure 4.5 Valeurs calculées de  $K_2$  en fonction de  $\cos \alpha$ .

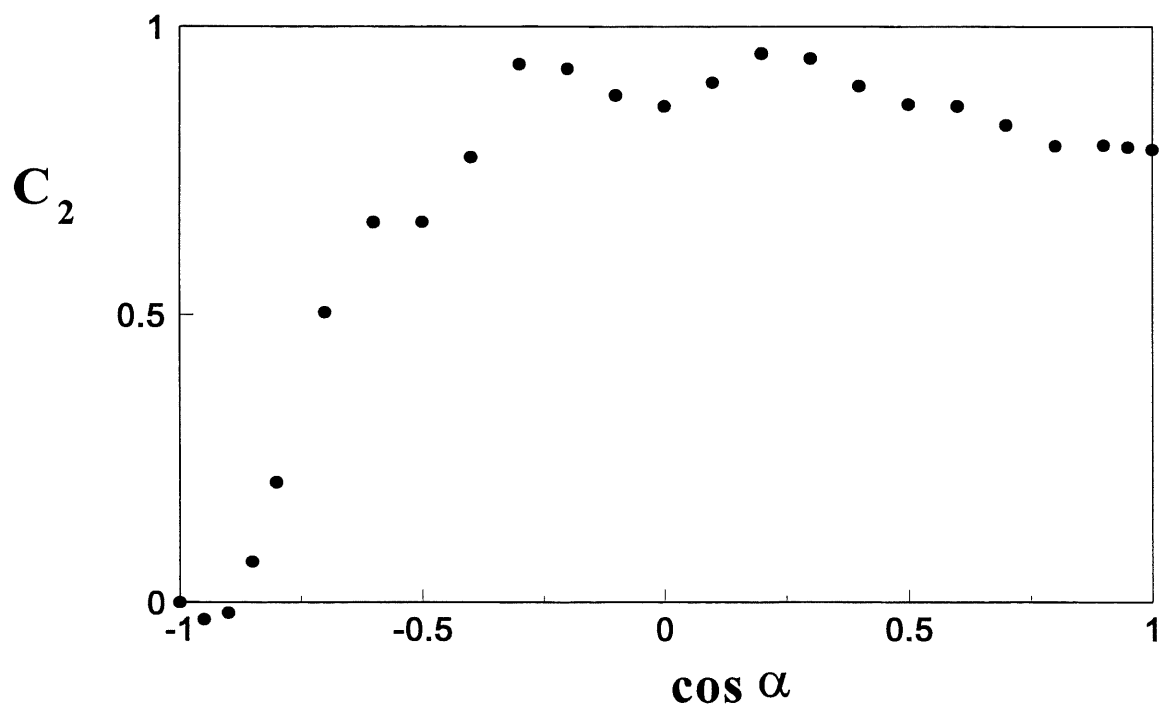


Figure 4.6 Valeurs calculées de  $C_2$  en fonction de  $\cos \alpha$ .

Les Figures 4.3-6 nous présentent les tendances générales. Dans le cas newtonien, lorsque la concentration de surfactant augmente, une plus grande partie de la surface est immobilisée et la friction sur la bulle augmente. C'est pour cette raison que  $K_1$  augmente de 1 à 1.5. A l'ordre deux (correction non-newtonienne) la situation est inversée. Une plus grande surface immobilisée implique plus de cisaillement à l'interface de la bulle et la viscosité diminue pour un fluide pseudoplastique ( $n < 1$ ) et augmente pour un fluide dilatant ( $n > 1$ ).

Sadhal et Johnson (1983) ont développé une expression exacte pour le problème d'une couche mince et insoluble de surfactant en utilisant l'inversion de série double. La solution pour une bulle en milieu newtonien est:

$$F = 4 \pi R U_{\infty} \eta_o \left\{ \frac{1}{4\pi} \left( 2\alpha^* + \sin \alpha^* - \sin 2\alpha^* - \frac{1}{3} \sin 3\alpha^* \right) + 1 \right\} \quad (4.58)$$

et

$$Ca^{-1} = \frac{\Delta\sigma}{U_{\infty}\eta_o} = \frac{1}{\pi} [3\alpha^* + 3 \sin \alpha^* - \alpha^* (1 + \cos \alpha^*)] \quad (4.59)$$

où  $\alpha^* = \pi - \alpha$ . En comparant les Equ.(4.58) et (4.54), on remarque que le terme entre accolades représente notre  $K_1$ . Les deux valeurs sont comparées sur la Figure 4.3. La Figure 4.4 compare aussi la valeur de  $C_1$  avec l'Equ.(4.59). Sur la Figure 4.3, on remarque que la valeur de  $K_1$  semble bonne pour notre approximation, ce qui n'est pas le cas pour  $C_1$ . Ceci est attribué au nombre de termes qui est insuffisant pour la fonction de courant. Ce phénomène a déjà été discuté par Davis et Acrivos (1966). Ceci provient du fait que l'on doit travailler avec des conditions frontières qui

sont mixtes et qu'il est toujours difficile de représenter une fonction qui est nulle sur une partie d'un intervalle par une série de polynômes.

Néanmoins, à partir de l'Equ.(4.56), nous pouvons résoudre l'équation cubique pour obtenir  $U_\infty$ .

Deux cas différents se présentent: nous pouvons avoir une ou trois racines réelles, dépendant de la valeur du déterminant  $Q$ :

$$Q = 4k_1^3 + 27k_2^2 \begin{cases} > 0 & 1 \text{ racine réelle} \\ < 0 & 3 \text{ racines réelles} \end{cases} \quad (4.60)$$

En introduisant les paramètres  $k_1$  et  $k_2$  de l'Equ.(4.57a,b) nous obtenons:

$$Q = \left( \frac{R^6}{\lambda^4 K_2^2 (n-1)^3} \right) \left( \frac{4K_1^3}{\lambda^2 K_2 (n-1)} + \frac{3g^2 R^2 (\Delta\rho)^2}{\eta_o^2} \right) \quad (4.61)$$

Pour des fluides dilatants:  $(n-1) > 0$  et seulement une seule racine réelle est possible. Au contraire, pour des fluides pseudoplastiques:  $(n-1) < 0$  et trois racines réelles sont possibles si:

$$R^2 < \frac{4K_1^3 \eta_o^2}{3\lambda^2 K_2 (\Delta\rho)^2 g^2 |n-1|} \quad (4.62)$$

Cette situation pourrait correspondre au saut pour la vitesse de bulles dans des solutions polymériques. L'Equ.(4.62) peut se mettre sous la forme:

$$V < \pi \left( \frac{4}{3} \right)^{5/2} \left( \frac{K_1}{K_2} \right)^{3/2} \left( \frac{1}{\lambda^2 |n-1|} \right)^{3/2} \left( \frac{\eta_o}{g\Delta\rho} \right) \quad (4.63)$$



Connaissant tous les paramètres dans l'Equ.(4.63), il serait possible de calculer la valeur du volume critique pour lequel ce saut pourrait être observé. Pour le moment, aucune données expérimentales ne sont disponibles dans le domaine de validité de l'Equ.(4.63).

Une des racines de l'Equ.(4.56) peut être obtenue par une méthode de perturbation. La relation obtenue est:

$$U_{\infty} = U_o + (n-1)Cu^2U_1 \quad (4.64)$$

A partir des Eqs.(4.56-57a,b) on obtient:

$$U_o = \frac{gR^2\Delta\rho}{3\eta_o K_1} \quad (4.65a)$$

$$U_1 = -\frac{gR^2 K_2 \Delta\rho}{3\eta_o} \quad (4.65b)$$

Dans l'Equ.(4.65b), le terme  $K_2$  est positif et si trois racines réelles sont possibles, deux de celles-ci possèdent le même signe et l'autre est de signe contraire. Une racine est donnée par l'Equ.(4.64) et les deux autres sont possiblement négatives et aucune signification physique ne peuvent y être rattachée. Ceci élimine la possibilité d'un saut entre deux racines possibles. De plus, aucun saut du genre n'a été observé dans des fluides inélastiques.

#### 4.5.2 Distribution continue

Dans le cas de l'hypothèse de distribution continue du surfactant, il n'y a pas de discontinuité dans les conditions frontières et la résolution des équations s'en trouve simplifiée. Pour chacun des trois modèles exposés auparavant, nous donnons ici les valeurs de différents coefficients  $K_3$  à  $K_6$  pour évaluer la force de friction. Ceci est fait à l'aide du Tableau 4.1. Dans le cas du modèle d'ordre cinq, nous pouvons calculer une limite inférieure et une limite supérieure pour les coefficients. La limite inférieure est obtenue en posant  $e_5$  et  $f_5$  nuls. De cette façon, on retrouve le modèle cubique. La limite supérieure est obtenue en posant  $e_5 = 0$  et  $f_5 = 3/16 \Delta\sigma$ . De plus, en utilisant une combinaison de valeur à l'intérieur du domaine D, les valeurs de  $K_3$ - $K_6$  varient très peu. Seulement  $K_3$  varie selon:

$$K_3 = \frac{8}{105} \frac{f_5}{\Delta\sigma} \quad (4.66)$$

Pour tous les modèles, la solution pour le fluide non-contaminé de l'Equ.(4.52) est retrouvée en posant  $\Delta\sigma = 0$ .

TABLEAU 4.1 VALEURS DES COEFFICIENTS  $K_3$  - $K_6$  POUR LES DIFFÉRENTS MODÈLES.

Modèle	$K_3$	$K_4$	$K_5$	$K_6$
linéaire	0.1667	-0.0993	0.0310	-0.0036
cubique	0.2000	-0.1094	0.0376	-0.0053
ordre cinq	0.2143	-0.1115	0.0400	-0.0065

De tous les fluides utilisés au chapitre 3, seul le 3 % poids PEO permet des nombres de Carreau assez faibles afin de pouvoir utiliser le modèle développé ici. Pour cette solution, les paramètres du modèle de Carreau sont:  $\eta_0 = 0.53 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ,  $\lambda = 0.037 \text{ s}$  et  $n = 0.798$ . La figure 4.7 compare les résultats expérimentaux de la force avec les valeurs calculées pour le modèle d'ordre cinq. On peut voir que la relation fonctionne assez bien pour des volumes inférieurs à  $250 \mu\text{L}$ . Pour cette région, l'erreur est inférieure à 10 %. Pour des volumes supérieurs à  $250 \mu\text{L}$ , deux phénomènes peuvent expliquer la déviation au modèle. En premier lieu, la bulle ne peut plus être considérée comme étant sphérique, mais plutôt en forme de larme tel que discuté par De Kee et Chhabra (1988). Ceci implique que la déformation doit être incluse pour améliorer le modèle. En second lieu, les effets de parois ne sont plus négligeables. Il a été mesuré expérimentalement que les effets de parois sont inférieurs pour les fluides non-newtoniens que pour les fluides newtoniens tel que revu par Chhabra (1986). Une correction est donc à apporter soit au modèle mathématique, soit à la prise de mesures au laboratoire.

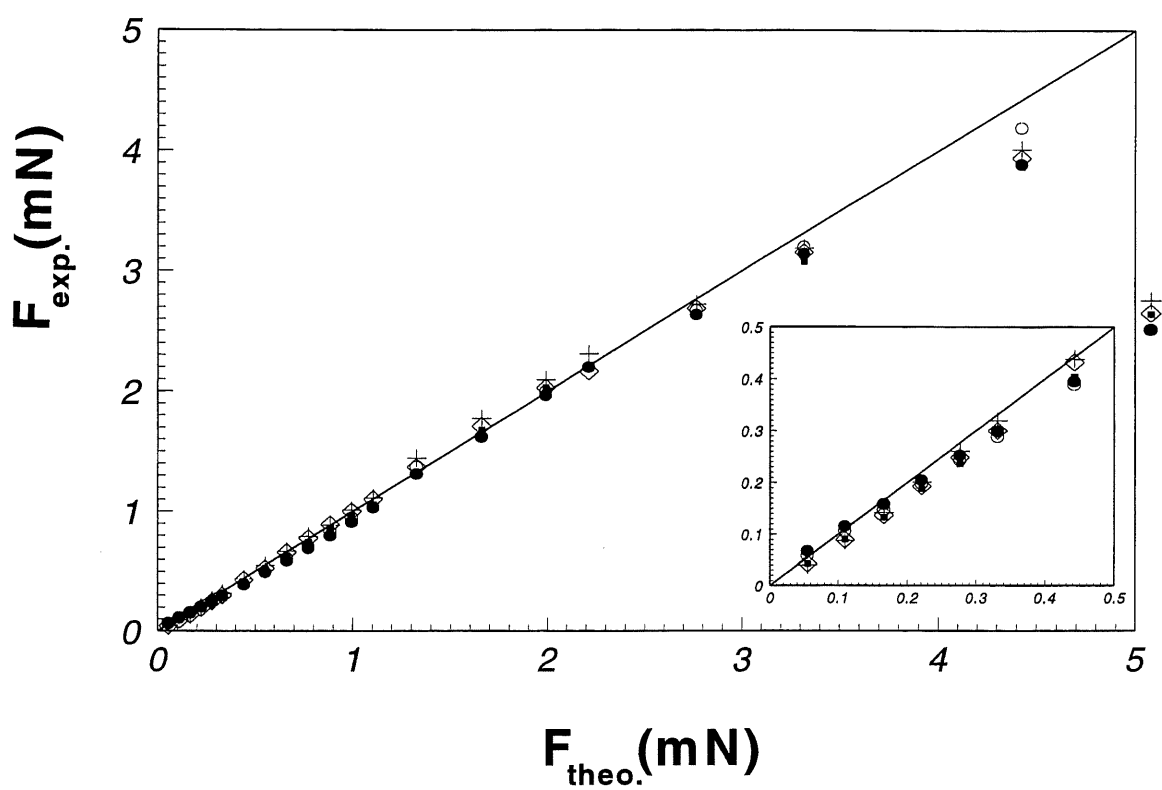


Figure 4.7 Force expérimentale en fonction de la force théorique calculée par le modèle d'ordre cinq. • : 0, o : 30, ■ : 100, ◇ : 500, + : 1000 ppm SDS.

## 4.6 Discussion

Deux hypothèses différentes ont été utilisées afin de représenter les conditions qui existent à l'interface liquide-gaz pour le mouvement d'une bulle sphérique dans un milieu infini non-Newtonien, et ceci dans le cas où le nombre de Reynolds est faible ( $Re \ll 1$ ). Comme une méthode de perturbation a été utilisée pour résoudre les équations, ceci nous permet d'écrire la force de friction comme une somme de deux termes, une contribution newtonienne et une correction non-newtonienne comme l'Equ.(4.54). Dans la limite des nombres de Carreau faibles, la correction est négligeable sauf pour les fluides présentant un fort caractère dilatant ou pseudoplastique. Comme la valeur de  $K_2$  est inférieure à celle de  $K_1$ , les effets du surfactant se font surtout sentir à travers la contribution newtonienne.

On peut donc affirmer que le paramètre  $K_1$  est le plus important dans cette étude. Il représente la correction à la force de friction en présence de surfactant. Dans chaque cas, la valeur de  $K_1$  augmente avec la concentration de surfactant. Ceci implique que la vitesse de la bulle diminue avec une augmentation de la concentration. Ceci est observé expérimentalement pour des concentrations de surfactant inférieures à la cmc. Pour des concentrations supérieures, quelques surfactants montrent de la remobilisation de l'interface due à la compétition entre les micelles et le fluide pour les molécules de surfactant. Ce phénomène a été étudié par Stebe et coll.(1991) et par Stebe et Maldarelli (1994) pour des fluides newtoniens. Ces derniers ont observé que la vitesse de la bulle retrouvait presque totalement sa valeur du fluide non-contaminé. Le même phénomène est possiblement à prévoir pour les fluides non-newtoniens.

Nous avons aussi démontré que l'hypothèse de la distribution continue était plus simple à résoudre que celle de la calotte sphérique. Ceci est dû principalement à la discontinuité dans les conditions frontières de cette dernière qui peut n'être qu'un artifice mathématique sans appuis physiques. La distribution continue de surfactant semble être plus réaliste physiquement.

Nous devons aussi mentionner que la force sur la bulle est aussi une fonction du nombre de Reynolds. Pour de nombres de Reynolds supérieurs à l'unité, les termes d'inertie doivent être inclus dans la solution des équations de conservation. Ces termes vont aussi affecter la déformation et le transfert de masse à l'interface. Il est connu que pour  $Re > 100$ , ni la calotte sphérique, ni la distribution continue sont valides. Ces conditions doivent être remplacées par l'approximation de l'anneau stagnant où les molécules absorbées s'accumulent plutôt qu'au point de stagnation arrière de la bulle. Cet endroit correspond au point de détachement de la couche limite. Le cas newtonien a été étudié par Andrews et coll.(1988) et par Andrews et Wong (1995). Une analyse non-newtonienne du problème n'est pas disponible pour le moment.

Bush et Phan-Thien (1984) ont utilisé une méthode numérique afin d'obtenir la force de friction sur une sphère rigide dans un fluide suivant le modèle de Carreau. Dans la limite des approximations faites ici, ils ont trouvé que la valeur de  $K_2$  était une fonction du paramètre  $n$ . Leurs résultats donnent une valeur entre 0.0091 et 0.0637 pour  $K_2$ . La valeur trouvée ici se rapproche de la limite supérieure.

## 5. CORRÉLATIONS POUR FLUIDES VISCOÉLASTIQUES

Comme mentionné au chapitre 4, nous allons nous intéresser plus particulièrement à la discontinuité observée aux Figures 3.10-11. Une revue des possibles explications existantes dans la littérature est effectuée en premier lieu. Par la suite, basé sur les données expérimentales, une explication est énoncée pour l'apparition de ce phénomène et une corrélation est proposée afin de déterminer l'existence de cette discontinuité et le volume pour lequel elle se produira.

### 5.1 Revue de la littérature

Il existe dans la littérature, un dilemme qui est demeuré sans réponse depuis environ 30 ans. Il s'agit de la possibilité d'obtenir une discontinuité dans la représentation graphique de la vitesse de la bulle en fonction de son volume, lorsqu'elle se déplace dans un milieu non-Newtonien. Jusqu'à présent, aucune indication ne semble pouvoir expliquer de façon acceptable et précise ce phénomène. Il existe donc deux groupes distincts sur le sujet: les personnes ayant mesuré un saut expérimentalement et celles qui ne l'ont pas mesuré. Une revue détaillée sur le sujet est disponible depuis peu dans De Kee et coll.(1996).

Mentionnons ici les travaux des auteurs qui ont effectivement mesuré un tel saut: Astarita et Apuzzo (1965), Calderbank et coll.(1970), Leal et coll.(1971), Acharya et coll.(1977), Zana et Leal (1978), ainsi que Haque et coll.(1988). Chacun des ces travaux sont discutés ci-après dans le but d'énumérer les différentes hypothèses émises pour expliquer ce phénomène.

Les premiers à avoir mesurer expérimentalement une telle discontinuité furent Astarita et Apuzzo (1965). A partir des mesures effectuées sur des bulle d'air dans des solutions aqueuses de polyacrilamide (AP-30), ils postulèrent que la transition représentait un saut entre le régime de Stokes (surface rigide) et le régime d'Hadamard (surface libre). Suite à ceci, l'élasticité du fluide serait responsable pour la façon abrupte dont la transition s'effectue.

A la lueur des résultats obtenus au chapitre 4, nous pouvons observer que le phénomène provient des effets de surface et des effets élastiques qui existent à l'interface liquide-gaz. Nous y reviendrons plus en détails à la section 5.3. Suite au travail d'Astarita et Apuzzo, d'autres hypothèses ont été émises afin d'expliquer la discontinuité. En premier lieu, l'absence de discontinuité pour des sphères rigides de verre dans l'étude de Leal et coll.(1971) semble supporter cette idée.

Par la suite, Acharya et coll.(1977) ont supposé que les molécules de polymères pouvaient agir comme surfactants et induisaient des gradients de tension de surface (contrainte de Marangoni) à l'interface liquide-gaz. Ces contraintes réduisaient la circulation à l'interface et ralentissaient la bulle de façon appréciable. Dans ce cas, la transition abrupte résulterait d'un "nettoyage" de la surface restaurant la circulation interne. Mais aucun mécanisme ne fut fourni pour expliquer ceci. Zana et Leal (1978) proposèrent deux modèles à leur tour: le modèle du film et le modèle de surfactant. Le modèle du film représente la formation d'une membrane élastique, une troisième phase à l'interface composée de molécules de polymères, recouvrant la bulle. Le saut en vitesse



est alors expliqué par la rupture de cette membrane par les forces de cisaillement générées par l'hydrodynamique du mouvement de la bulle. Le modèle du surfactant revient à considérer les molécules de polymères comme des molécules de surfactant qui viennent modifier la tension de surface. Pour ce modèle, la transition est expliquée indirectement par le transfert de masse à l'interface.

Récemment, une autre hypothèse possible peut être mise de l'avant à l'aide de la théorie de migration des molécules de polymères et de la théorie de mélange inverse (demixing). Il est connu maintenant que pour des écoulements non-homogènes ou avec des courbures, les molécules de polymères migrent dû au cisaillement ou au caractère extensionnel. Ce phénomène a été revu d'une façon très extensive par Larson (1992) et par Agarwal et coll.(1994). Les solutions de polymères peuvent être non-homogènes due à la migration des molécules vers des régions de contraintes moins élevées. Suite à ceci, une couche libre de polymères peut se développer près de la surface de la bulle, conduisant à une condition de glissement dans la couche limite. Comme ce phénomène est relié aux contraintes normales, il peut expliquer en partie la transition abrupte. Nous croyons que cette hypothèse mérite plus amples attentions. Néanmoins, elle ne peut expliquer complètement la discontinuité car la migration des molécules de polymères est un phénomène très lent dominé principalement par la dynamique moléculaire.

## 5.2 Résultats

Les Figures 3.10-11 nous montrent que pour les solutions de PAA, il existe des conditions particulières dans lesquelles une discontinuité est possible. Ceci explique pourquoi on ne l'observe pas dans toutes les solutions polymériques. Ces figures semblent indiquer que la présence de surfactants est une condition nécessaire pour l'obtention d'une discontinuité. Sur la Figure 5.1, nous pouvons voir que pour une concentration de 400 ppm de SDS, une discontinuité est observée pour chaque concentration de polymère. Mais la Figure 3.11 montre une discontinuité même pour la solution pure de PAA. Ceci semble indiquer la possibilité d'une concentration critique pour l'existence du saut. La Figure 5.2 montre les courbes vitesse-volume pour les solutions de PAA sans surfactants. On y remarque que pour les faibles concentrations (0.075 et 0.10 % poids), il n'y a pas de saut, tandis qu'au contraire, pour les concentrations plus élevées (0.15, 0.20 et 0.25 % poids), une discontinuité existe. Tous ces résultats indiquent que le phénomène recherché existe seulement sous certaines conditions précises que nous allons déterminer ici.

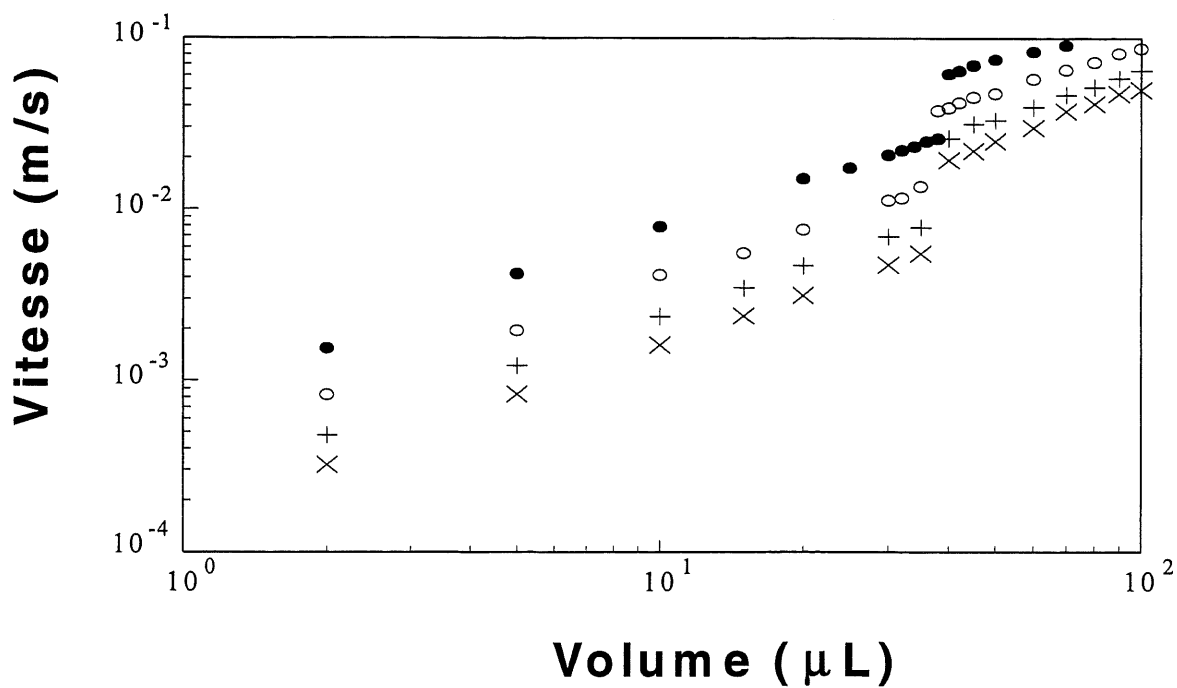


Figure 5.1 Vitesse en fonction du volume pour les solutions de PAA contenant 400 ppm SDS. • : 0.10, o : 0.15, + : 0.20, x : 0.25.

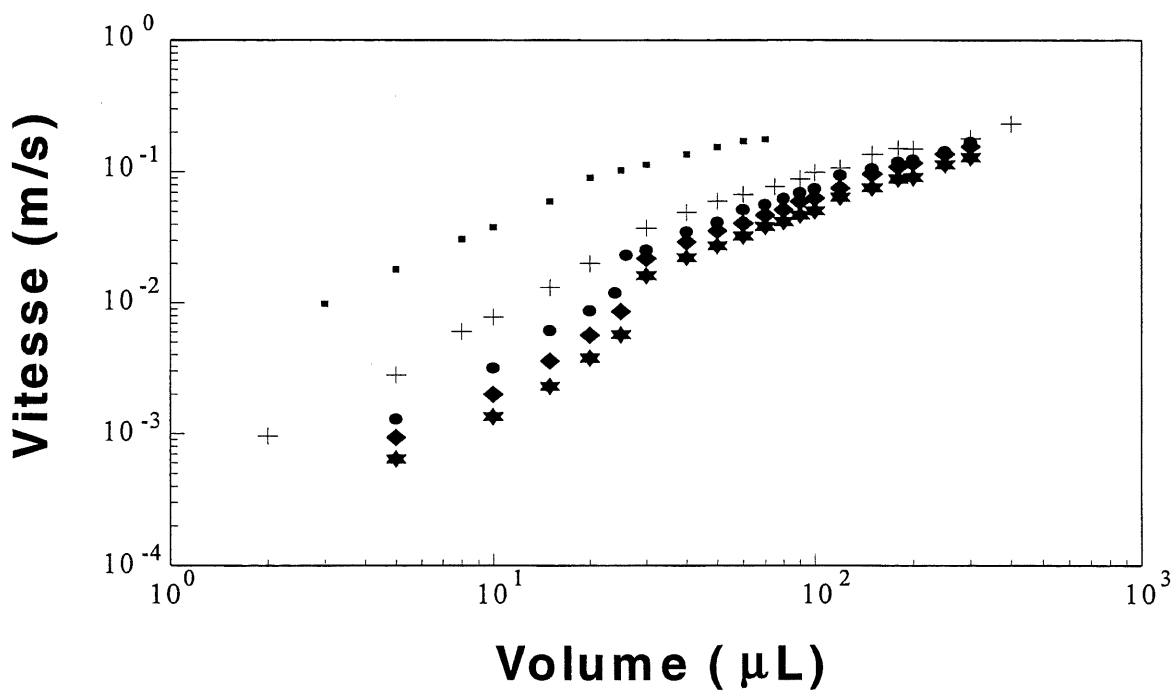


Figure 5.2 Vitesse en fonction du volume pour les solutions de PAA sans surfactant ajouté. ■ : 0.075, + : 0.10, • : 0.15, ◆ : 0.20, ★ : 0.25.

La Figure 5.3 montre que la valeur de la tension de surface de la solution est effectivement une fonction de la concentration en polymère. Il existe une concentration entre 0.10 et 0.15 % poids où la tension de surface est modifiée et des effets sont possibles sur la vitesse de la bulle. Ceci correspond exactement avec les mesures expérimentales représentées sur la Figure 5.3. De plus, ceci apporte un certain appui au modèle du surfactant de Zana et Leal (1978) et aux mesures expérimentales de Haque et coll.(1988).

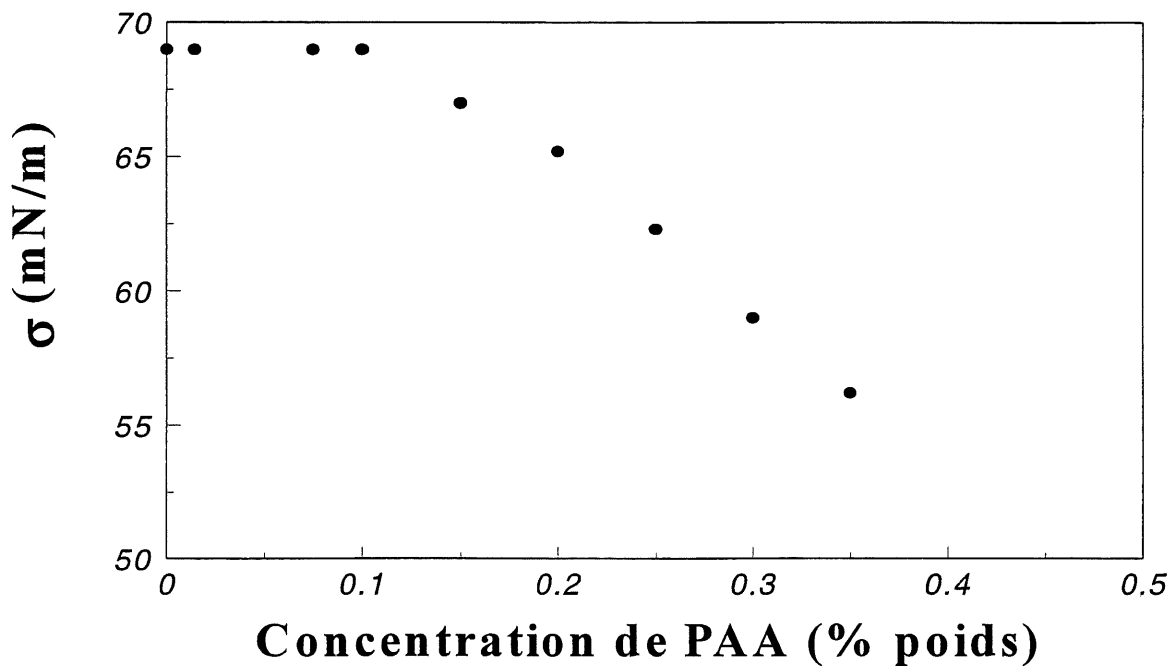


Figure 5.3 Tension de surface des solutions de PAA en fonction de la concentration en polymère.

Les solutions de PAA sont les seules dans cette étude à présenter des discontinuités et des contraintes normales. Ceci est consistant avec l'explication d'Astarita et Apuzzo (1965). La

Figure 5.4 montre que le volume critique (volume auquel la discontinuité se produit) est une légère fonction de la concentration de surfactant. Cette observation nous servira plus tard.

On peut remarquer aussi sur la Figure 5.1, que la hauteur du saut ( $H$ ) est une faible fonction de l'élasticité du fluide. Le Tableau 5.1 montre la magnitude du saut (rapport entre la vitesse de la bulle après le saut et la vitesse de la bulle avant le saut) en fonction de la concentration en polymère et en surfactant.

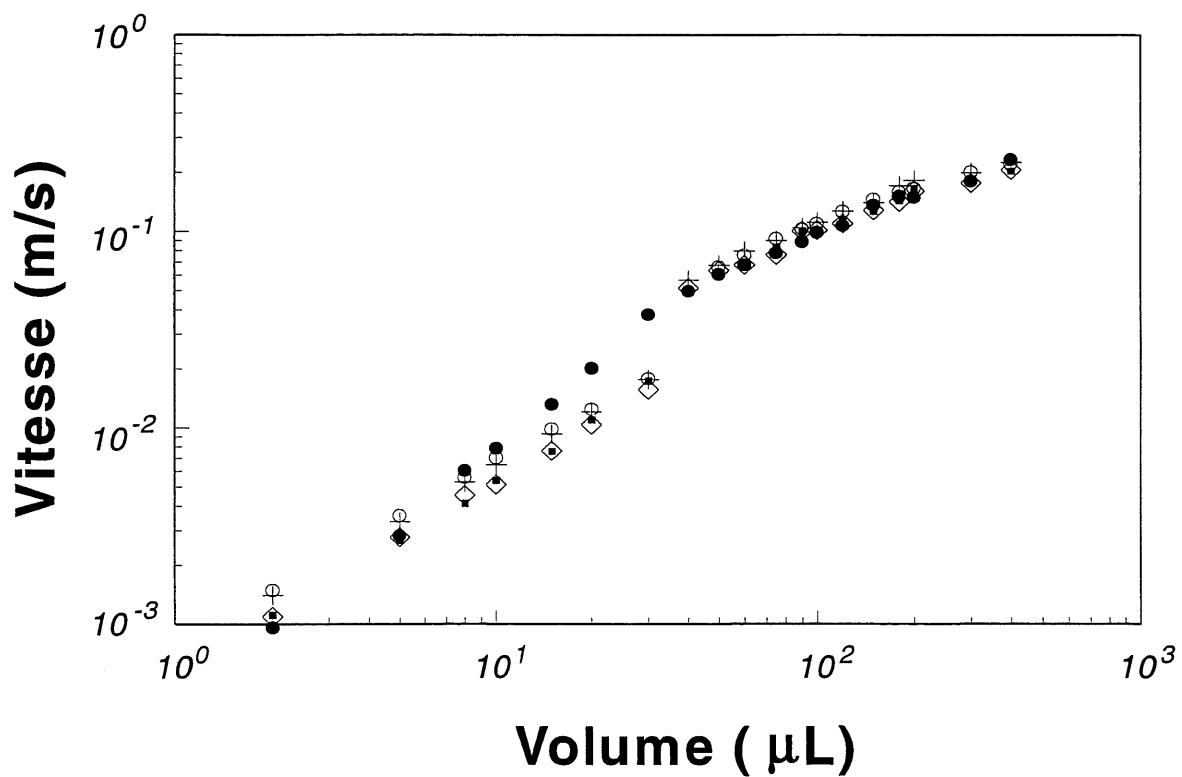


Figure 5.4 Vitesse en fonction du volume et de la concentration en SDS pour la solution 0.10 PAA. • : 0 ppm, o : 50 ppm, + : 100 ppm, ■ : 200 ppm, ◇ : 400 ppm.

TABLEAU 5.1 HAUTEUR DU SAUT DE VITESSE EN FONCTION DE LA CONCENTRATION EN SURFACTANT POUR LES SOLUTIONS DE PAA.

Concentration PAA ( % poids )	Hauteur du saut (H) [-]		
	0 ppm SDS	100 ppm SDS	400 ppm SDS
0.075	-	1.6	-
0.1	-	2.4	2.4
0.15	1.9	2.8	3.1
0.2	2.5	3.2	3.3
0.25	2.8	3.5	3.9

Toutes les observations disponibles nous permettent de dire que le bilan de force sur la bulle doit contenir des termes tenant compte de la tension de surface et de l'élasticité. A partir de ceci, nous pouvons exprimer trois choses: 1) Dans le cas de faible concentration de polymère, où les forces élastiques sont faibles, le ratio des forces élastiques sur les forces de tension de surface est faible et aucune discontinuité n'est possible. C'est pour cette raison que sur la Figure 3.10, la courbe est continue pour 0 ppm de surfactant. 2) Pour cette même concentration de PAA, l'addition de 100 ppm de SDS augmente la valeur du ratio des forces élastiques sur les forces de tension de surface et dans ce cas, une discontinuité est possible. 3) En augmentant la concentration de polymère en absence de surfactant, augmente aussi le ratio pour résulter possiblement à une discontinuité tel qu'illustrée à la Figure 3.11.

Des valeurs jusqu'à 7 ont été mesurées par Zana et Leal (1978) pour la hauteur des sauts. L'hypothèse avancée ici est la suivante: la discontinuité représente un saut abrupt entre le régime de Stokes et le régime d'Hadamard, ceci étant causé par les forces normales qui, présentes à la

surface de la bulle, agissent à retirer les molécules de surfactants de la surface de celle-ci. Cette action crée une zone rhéologiquement différente du reste du milieu. Comme dans le cas du glissement à la paroi, la bulle va se déplacer à une vitesse supérieure comme expliqué auparavant.

Dans le cas des solutions polymériques, nous devons évaluer la hauteur du saut et la valeur du volume critique auquel il va se produire. La majorité des auteurs précédents ont tenté de relier la hauteur du saut à la valeur du paramètre de la loi de puissance  $n$ . Dans le cas d'un fluide newtonien, nous pouvons évaluer la vitesse d'une bulle ( $U_H$ ) et la vitesse d'une sphère ( $U_S$ ). Pour un volume déterminé, le rapport entre ces deux vitesses nous donne:

$$H = U_H / U_S = \frac{3}{2} \quad (5.1)$$

D'après le travail de Rodrigue et coll.(1996), la même chose peut être faite dans le cas d'un fluide non-newtonien si le nombre de Carreau est faible. La valeur obtenue est dans ce cas:

$$H = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{10}(n-1) \frac{\lambda^2}{R^2} U_S^2 \right] \quad (5.2)$$

qui est effectivement une fonction de  $n$ , mais aussi du rayon de la bulle. L'équation (5.2) montre que  $H$  augmente pour des fluides pseudoplastiques ( $n < 1$ ), ce qui est consistant avec les données expérimentales. Elle prédit aussi que la valeur de  $H$  devrait diminuer dans le cas de fluides dilatants ( $n > 1$ ). Pour ces derniers, aucune donnée expérimentale n'est disponible pour le

moment afin vérifier la tendance. Malgré tout, des données supplémentaires sont nécessaires afin de déterminer l'influence exacte de l'élasticité sur la hauteur du saut.

Un critère utilisé dans le passé pour expliquer la valeur du volume critique est celui de Bond (1928). Il relie la valeur du rayon critique de la bulle à la tension de surface du fluide ( $\sigma$ ), à l'accélération gravitationnelle ( $g$ ) et à la différence de densité entre le fluide et le gaz ( $\Delta\rho$ ) de la façon suivante:

$$R_c = \sqrt{\frac{\sigma}{g \Delta\rho}} \quad (5.3)$$

Le Tableau 5.2 indique la valeur du volume critique mesuré pour chacune des solutions de PAA testée en fonction du critère de Bond.



TABLEAU 5.2 COMPARAISON ENTRE LE VOLUME CRITIQUE EXPÉRIMENTAL ET LE CRITÈRE DE BOND

Concentration de PAA ( % poids )	Concentration de SDS ( ppm )	Volume critique (μL)	
		Expérimental	Critère de Bond
0.075	30	50	54
	100	65	42
0.1	50	25	66
	100	30	51
	200	30	41
	400	38	31
0.15	0	25	61
	30	30	54
	300	35	24
0.2	0	25	60
	30	30	54
	300	30	32
0.25	0	25	56
	7	25	56
	30	30	46
	100	35	45
	300	35	34

Le Tableau 5.2 indique que le critère de Bond n'est pas satisfait dans le cas des solutions de PAA utilisées. De plus, la tendance n'est pas respectée. En effet, nos données suggèrent qu'une diminution de la tension de surface, augmente le volume critique. Cette observation suggère un critère plus élaboré afin de déterminer le volume critique. Ceci est fait à partir d'une analyse dimensionnelle.

### 5.3 Analyse dimensionnelle

Comme mentionné auparavant, le critère de Bond ne représente pas bien les données. Il s'est tout de même avéré être approximatif pour certains fluides. Une comparaison pour différents fluides est disponible dans De Kee et coll.(1996). A partir des observations recueillies, nous pouvons postuler que le rayon critique est une fonction de la tension de surface ( $\sigma$ ), de la différence entre la tension de surface du liquide pure et la tension de surface du liquide avec surfactant ( $\Delta\sigma$ ), de la densité du fluide ( $\rho$ ), de la constante gravitationnelle ( $g$ ) et de la différence des contraintes normales primaires ( $N_1$ ) de la façon suivante:

$$R_c = f(\sigma, \Delta\sigma, \rho, g, N_1) \quad (5.4)$$

Comme  $N_1$  est une fonction du taux de cisaillement ( $\dot{\gamma}$ ), nous devons choisir une valeur pour la remplacer dans l'Equ.(5.4). Pour chacune des solutions de PAA, nous pouvons tracer sur le même graphique la contrainte de cisaillement ( $\tau$ ) et la différence des contraintes normales primaires ( $N_1$ ) en fonction du taux de cisaillement ( $\dot{\gamma}$ ). Ceci nous permet de calculer la valeur du taux de cisaillement critique ( $\dot{\gamma}_c$ ) pour lequel les deux courbes se croisent. A cet endroit, nous obtenons la valeur de  $N_1(\dot{\gamma}_c)$ . C'est cette valeur que nous allons utiliser dans l'Equ.(5.4). Le Tableau 5.3 nous donne la valeur de chacun pour les solutions de PAA de cette étude.

TABLEAU 5.3 VALEURS DES PARAMÈTRES RHÉOLOGIQUES CRITIQUES POUR LES SOLUTIONS DE PAA.

Concentration de PAA ( % poids )	$\dot{\gamma}_c$ (s <sup>-1</sup> )	$N_1(\dot{\gamma}_c)$ (Pa)
0.075	3.16	0.4
0.1	0.16	0.2
0.15	0.14	0.24
0.2	0.11	0.25
0.25	0.11	0.35

A l'aide d'une analyse dimensionnelle, l'Equ.(5.4) peut être réécrite de la façon suivante:

$$\frac{\rho g R_C}{\sigma} = \beta_1 \left( \frac{\Delta\sigma}{\sigma} \right)^{\beta_2} \left( \frac{N_1 R_C}{\sigma} \right)^{\beta_3} \quad (5.5)$$

Pour les données recueillies sur les solutions de PAA, on trouve que:

$$\beta_1 = 7 \quad \beta_2 = 1/5 \quad \beta_3 = 2/5 \quad (5.6)$$

## 5.4 Discussion

Les équations (5.5-6) représentent le rayon critique de chacune des 17 discontinuités mesurées pour les solutions de PAA à l'intérieur de 12 %. Le Tableau 5.4 donne la correspondance pour le volume critique.

TABLEAU 5.4 COMPARAISON ENTRE LE VOLUME CRITIQUE MESURÉ ET CALCULÉ PAR L'EQU.(5.5)

Concentration de PAA ( % poids )	Concentration de SDS ( ppm )	Volume critique ( $\mu$ L)	
		Expérimental	Calculé
0.075	30	50	41
	100	65	45
0.1	50	25	24
	100	30	26
	200	30	27
	400	38	25
0.15	0	25	21
	30	30	30
	300	35	26
0.2	0	25	23
	30	30	29
	300	30	30
0.25	0	25	35
	7	25	36
	30	30	41
	100	35	41
	300	35	39

Dans le but de vérifier la relation obtenue, nous avons utilisé les résultats de Leal et coll.(1971).

Le Tableau 5.5 donne les valeurs nécessaires pour calculer le volume critique pour les solutions 0.5 et 1 % poids de Separan AP-30 de Leal et coll.(1971). Certaines des données ont été mesurées dans notre laboratoire. Il s'agit de la tension de surface et de la densité.

En comparant les tableaux 5.2 et 5.4, on remarque que l'Equ.(5.5) prédit beaucoup mieux la valeur du rayon critique que l'Equ.(5.3).

TABLEAU 5.5 PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES SOLUTIONS DE LEAL ET COLL.(1971)

Concentration de PAA ( % poids )	$R_c$ (mm)	$\sigma$ (mN/m)	$\Delta\sigma$ (mN/m)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\dot{\gamma}_c$ (s <sup>-1</sup> )	$N_1(\dot{\gamma}_c)$ (Pa)
0.5	2.89	50	22	999	0.67	0.88
1	2.9	43	29	1000	0.14	0.92

Les valeurs du Tableau 5.5 nous donne une rayon critique de 2.93 et 2.90 mm pour les solutions de 0.5 et de 1.0 % poids respectivement. Ces valeurs sont excellentes!

Pour les gaz, on peut approximer  $\Delta\rho$  par  $\rho$ . Dans cette situation, l'Equ.(5.5) peut être vue comme étant un critère de Bond modifié pour prédire le rayon critique pour lequel une discontinuité se produira. De plus, cette équation représente les caractéristiques mises en évidences par le mesures expérimentales: aucune discontinuité pour les fluides newtoniens ( $N_1 = 0$ ) et pour les fluides où aucun agent de surface n'intervient ( $\Delta\sigma = 0$ ).

## 6. CONCLUSIONS

La vitesse terminale d'une série de particules non-sphériques a été mesurée dans divers types de fluides présentant des caractères rhéologiques différents: newtonien, pseudoplastique, viscoélastique et de type Boger. Les résultats obtenus montrent clairement qu'une correction tant sur le caractère non-sphérique de la particule que sur le caractère non-newtonien du fluide est nécessaire afin de représenter de façon acceptable les données sous forme de courbe maîtresse. L'utilisation d'un facteur de forme permet de tenir compte de la géométrie de la particule. Quant au caractère rhéologique, il a été montré que le modèle de la loi de puissance était inefficace pour représenter les données à très faible nombre de Reynolds dû à son incapacité de représenter la viscosité à faible taux de cisaillement. L'utilisation d'un modèle comme celui de Carreau permet de combler cette lacune et de définir un nombre de Reynolds généralisé. Dans le cas de fluides élastiques, une correction supplémentaire est nécessaire et est basée sur le nombre de Weissenberg. En tout, au-delà de 400 points expérimentaux sont disponibles avec une déviation maximale de 25 % avec la correction apportée par l'Equ.(2.21).

En second lieu, la vitesse terminale de bulles d'air a été mesurée dans différents fluides non-newtoniens avec et sans impuretés. Deux différents modèles ont été utilisés pour tenir compte de l'addition de surfactant dans le milieu externe à la bulle: la calotte sphérique et la distribution continue. L'analyse effectuée se limite au cas où le nombre de Carreau est faible. Dans la limite de cette approximation, il a été montré que la variation dans la vitesse de la bulle

due au changement de viscosité avec le taux de cisaillement est négligeable et quasi indépendant de la présence de surfactant.

Dans le cas du modèle de la calotte sphérique, le fait que les conditions limites soient mixtes entraîne une difficulté supplémentaire pour résoudre les équations. Ceci entraîne des instabilités et des oscillations dans le résultat final. De plus, un grand nombre de termes sont nécessaires pour la fonction de courant afin d'obtenir une bonne approximation sur le profil de vitesse interfaciale.

Pour le modèle de la distribution continue de surfactant, la force surfacique produite par les impuretés est exprimée par une expression polynomiale. Il est important de mentionner ici que le transfert de masse à l'interface joue un rôle très important et est contrôlé par l'hydrodynamique du système. Suite à ceci, des conditions de symétrie sont utilisées pour déterminer les coefficients dans un polynôme d'ordre cinq afin d'obtenir une limite inférieure et une limite supérieure pour la force sur la bulle. Récemment, Milliken et Leal (1994) ont conduit une étude pour évaluer l'influence de la solubilité du surfactant. Les résultats montrent que la solubilité a un effet important sur la déformation et sur la vitesse interfaciale. Ceci semble indiquer que plus amples recherches sont nécessaires dans cette direction. Dans notre cas nous avons posé que le rayon de la bulle demeurerait constant et que la déformation était négligeable. Ceci n'est pas vraiment le cas pour des fluides non-newtoniens. A la surface de la bulle, le taux de cisaillement est une fonction de la position. Comme la viscosité est une fonction du taux de cisaillement, elle est aussi une fonction de la position. Le rayon de courbure de la bulle doit donc s'ajuster pour

satisfaire le bilan de force à l'interface. C'est pour cette raison que la déformation est plus importante dans les fluides à viscosité variable.

Des effets peuvent aussi provenir de la viscosité interfaciale qui a été négligée dans cette étude. Les équations de couche limite peuvent nous être utiles dans ce cas. Andrews et Wong (1995) ont considéré ces effets pour une bulle dans un fluide newtonien. Le même type d'étude est alors possible pour les fluides non-newtoniens. De plus, le transfert de masse à l'interface doit être pris en ligne de compte afin de mieux représenter les phénomènes à l'interface. Mais ceci ne va pas sans complication numérique.

De façon expérimentale, il a été démontré aussi que les effets de tension de surface étaient beaucoup plus importants dans une certaine région de la courbe vitesse-volume allant voire jusqu'à une discontinuité dans le cas de fluides viscoélastiques. Dans ce dernier cas, une hypothèse est émise afin d'expliquer cette discontinuité. Finalement, une expression obtenue par analyse dimensionnelle est proposée pour déterminer le rayon critique de la bulle pour qu'une telle discontinuité se produise. La relation représente bien les valeurs mesurées dans cette étude, ainsi que les données de Leal et coll.(1971). Plus de recherche est encore à faire dans le but de quantifier le phénomène de façon plus exacte.



## RECOMMANDATIONS

Plusieurs points restent encore à éclaircir dans le domaine de l'hydrodynamique des particules en milieu rhéologiquement complexe. Voici une liste de certains points qui pourraient être plus approfondis à plus ou moins long terme.

Le premier point important à vérifier serait l'effet de la déformation. La déformation modifie le profil de vitesse à l'interface. Ceci devient encore plus important dans le cas de fluides non-newtoniens, car la déformation y est supérieure que pour le cas newtonien.

Le fait d'introduire l'élasticité du fluide dans la résolution des équations de conservation peut dans certains cas, en modifier le caractère de l'écoulement. Comme pour le cas de la discontinuité dans la courbe vitesse-volume pour la bulle, il est possible que le caractère de l'écoulement passe de cisaillement à extensionnel. Ceci peut du fait même modifier la déformation. Ce changement de caractère de l'écoulement peut aussi amener de effets de la différence des contraintes normales secondaires ( $N_2$ ). Malgré que  $N_2$  soit généralement inférieure à  $N_1$ , très peu d'études sont disponibles afin d'évaluer ses effets. De plus, une étude plus approfondie serait nécessaire sur des fluides présentant des caractères rhéologiques différents tels: les fluides dilatants et les fluides viscoplastiques.

Une étude approfondie du transfert de masse entre l'interface et le milieu extérieur est nécessaire pour pouvoir évaluer exactement l'effet des impuretés sur la vitesse interfaciale. Cette dernière est le paramètre le plus important pour déterminer la force agissant sur la particule.

En complément à l'étude faite ici, il serait important de vérifier les différents types d'impuretés qui peuvent être dissous dans le liquide. En premier lieu, ceci pourrait être fait en utilisant différents types de surfactants: ioniques, non-ioniques, cationiques et zwitterioniques. Par la suite, les effets des charges et du poids moléculaire du surfactant et du polymère auront sûrement des effets sur le transfert de masse. Dans la même ligne d'idée, le type de gaz composant la bulle peut avoir un effet sur les charges. Par la suite, tous ces effets pourraient être étudiés au point de vue de la coalescence entre deux ou plusieurs bulles.

Finalement, peu de données existent dans le cas où le transfert de masse s'effectue dans le sens inverse. Le changement de volume de la bulle par dissolution du gaz dans le milieu continu ou par réaction chimique avec celui-ci n'est pas bien connu. Ce système, quoique plus complexe, mérite plus d'attention pour les milieux réactionnels.

## NOMENCLATURE

$A$	Surface de la particule
$A_i, B_i, C_i, D_i$	Constantes d'intégration dans l'Equ.(4.16)
$A'_i, B'_i, C'_i, D'_i$	Constantes d'intégration dans l'Equ.(4.31)
$A_p$	Surface projetée de la particule
$Ca$	Nombre de Capillaire
$C_d$	Coefficient de friction
$C_d^*$	Coefficient de friction expérimental
$Cu$	Nombre de Carreau
$D$	Diamètre de la particule
$D_n$	Diamètre normalisé
$D_s$	Diamètre de sphère équivalent
$E^2$	Opérateur dans l'Equ.(4.10)
$F$	Force de friction
$g$	Accélération gravitationnelle
$G_i$	Polynôme de Gegenbauer de degré $-1/2$ et d'ordre $i$
$H$	Hauteur de saut dans la discontinuité
$II$	Deuxième invariant de tenseur du taux de déformation
$K$	Facteur de forme
$L$	Opérateur dans l'Equ.(4.8)
$m$	Paramètre de la loi de puissance
$M_{ij}$	Intégrale incomplète dans l'Equ.(4.24)
$n$	Paramètre de la loi de puissance
$N_1$	Différence des contraintes normales primaires
$N_2$	Différence des contraintes normales secondaires
$p$	Pression
$Pe$	Nombre de Péclet
$Q$	Déterminant dans l'Equ.(4.61)
$r$	Coordonnée radiale
$R$	Rayon de la particule
$\tilde{R}$	Constante des gaz
$R_c$	Rayon critique

$Re$	Nombre de Reynolds
$Re_o$	Nombre de Reynolds basé sur le modèle de Newton
$Re_p$	Nombre de Reynolds basé sur le modèle de la loi de puissance
$Re_c$	Nombre de Reynolds basé sur le modèle de Carreau
$T$	Température absolue
$U_{ns}$	Vitesse de la particule non-sphérique
$U_s$	Vitesse de la particule sphérique
$U_\infty$	Vitesse à l'infini
$v$	Vecteur vitesse
$V_c$	Volume critique
$V_p$	Volume de la particule
$X$	Facteur de correction dans l'Equ.(2.23)
$y$	$\cos \theta$
$Wi$	Nombre de Weissenberg

## Symboles grecs

$\alpha$	Complément de l'angle de la calotte sphérique
$\alpha^*$	Angle de la calotte sphérique
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	Constantes dans l'Equ.(5.5)
$\dot{\gamma}$	Taux de cisaillement
$\dot{\gamma}_c$	Taux de cisaillement critique
$\Gamma$	Concentration surfacique
$\lambda$	Paramètre du modèle de Carreau
$\eta$	Viscosité
$\eta_0$	Viscosité Newtonienne, paramètre du modèle de Carreau
$\rho_f$	Densité du fluide
$\rho_p$	Densité de la particule
$\Delta\rho$	Différence de densité entre la particule et le fluide
$\Psi$	Sphéricité, fonction de courant
$\sigma$	Tension de surface
$\sigma_{\max}$	Tension de surface de la solution sans surfactant
$\sigma_{\min}$	Tension de surface de la solution avec surfactant
$\Delta\sigma$	$\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$
$\tau$	Contrainte
$\theta$	Temps de relaxation ou angle
$\Xi$	Fonction de $\alpha$ dans l'Equ.(4.32)

## BIBLIOGRAPHIE

- ACHARYA, A., R.A. MASHELKAR et J. ULBRECHT, *Mechanics of bubble motion and deformation in non-Newtonian media*, Chem. Eng. Sci., 32, 863-872 (1977).
- AGARWAL, U.S., A. DUTTA et R.A. MASHELKAR, *Migration of macromolecules under flow: The physical origin and engineering implications*, Chem. Eng. Sci., 49, 1693-1717 (1994).
- AGRAWAL, S.K. et D.T. WASAN, *The effect of interfacial viscosities on the motion of drops and bubbles*, Chem. Eng. J., 18, 215-223 (1979).
- AMBESKAR, V.D. et R.A. MASHELKAR, *On the role of stress-induced migration on time-dependent terminal velocities of falling spheres*, Rheol. Acta, 29, 182-191 (1990).
- ANDREWS, G.F., R. FIKE et S. WONG, *Bubble hydrodynamics and mass transfer at high Reynolds number and surfactant concentration*, Chem. Eng. Sci., 43, 1467-1477 (1988).
- ANDREWS, G.F. et S.L.S. WONG, *Boundary-layer solution for a bubble rising through a liquid containing surface-active contaminants*, Ind. Eng. Chem. Res., 34, 1371-1382 (1995).
- ASTARITA, G. et G. APUZZO, *Motion of gas bubbles in non-Newtonian liquids*, AIChE J., 11, 815-820 (1965).
- BEITEL, A. et W.J. HEIDEGGER, *Surfactant effects on mass transfer from drops subject to interfacial instability*, Chem. Eng. Sci., 26, 711-717 (1971).
- BOND, W.N. et D.A. NEWTON, *Bubbles, drops and Newton's law*, Phil. Mag., 5, 794 (1928).

BROOKES, G.F. et R.L. WHITMORE, *The Static Drag on Bodies in Bingham Plastics*, Rheol. Acta , 7, 188-193 (1968).

BUSH, M.B. et N. PHAN-THIEN, *Drag force on a sphere in creeping motion through a Carreau model fluid*, J. non-Newt. Fluid Mech., 16, 303-313 (1984).

CALDERBANK, P.H., D.S.L. JOHNSON et J. LOUDON, *Mechanics and mass transfer of single bubbles in free rise through some Newtonian and non-Newtonian liquids*, Chem. Eng. Sci., 25, 235-256 (1970).

CARREAU, P.J., *Rheological equations from molecular network theories*, Trans. Soc. Rheol. , 16, 99-127 (1972).

CARREAU, P.J., M. DEVIC ET M. KAPELLAS, *Dynamique des bulles en milieu viscoélastique*, Rheol. Acta, 13, 477-489 (1974).

CHHABRA, R.P., *Steady non-Newtonian flow about a rigid sphere*, Encyclopedia of Fluid Mechanics, vol.1, Houston , 983-1032 (1986).

CHHABRA, R.P., *Hydrodynamics of bubbles and drops in rheologically complex liquids*, Encyclopedia of Fluid Mechanics, vol.7, Houston, 253-286 (1988).

CHHABRA, R.P., *Settling of cylinders in power-law liquids*, Can. J. Chem. Eng. , 70, 385-386 (1992).

CHHABRA, R.P., *Bubbles, Drops and particles in non-Newtonian fluids*, CRC Press, Boca Raton Fl.(1993).

CHHABRA, R.P. et P.H.T. UHLHERR, *Static equilibrium and motion of spheres in viscoplastic liquids*, Encyclopedia of Fluid Mechanics , vol.7, Houston, 611-633 (1989).

- CHO, K., Y.I. CHO et N.A. PARK, *Hydrodynamics of a vertically falling cylinder in non-Newtonian fluids*, J. non-Newt. Fluid Mech., 45, 105-145 (1992).
- CHO, Y.I. et J.P. HARTNETT, *The falling ball viscosimeter-A new instrument for viscoelastic fluids*, Lett. Heat Mass Trans., 6, 335-342 (1979).
- CHO, Y.I., J.P. HARTNETT et W.Y. LEE, *Non-Newtonian viscosity measurements in the intermediate shear rate range with the falling-ball viscometer*, J. non-Newt. Fluid Mech., 15, 61-74 (1984).
- CLIFT, R., J.R. GRACE et M.E. WEBER, *Bubbles, drops and particles*, Academic Press, New York (1978).
- CROSS, M.M., *Rheology of non-Newtonian fluids: A new flow equation for pseudoplastic systems*, J. Colloid Int. Sci., 20, 417-437 (1965).
- DAVIS, R.E. et A. ACRIVOS, *The influence of surfactants on the creeping motion of bubbles*, Chem. Eng. Sci., 21, 681-685 (1966).
- DE KEE, D., P.J. CARREAU et J. MORDARSKI, *Bubble velocity and coalescence in viscoelastic liquids*, Chem. Eng. Sci., 41, 2273-2283 (1986).
- DE KEE, D. et R.P. CHHABRA, *A photographic study of shapes of bubbles and coalescence in non-Newtonian polymer solutions*, Rheol. Acta, 27, 656-660 (1988).
- DE KEE, D., R.P. CHHABRA et A. DAJAN, *Motion and coalescence of gas bubbles in non-Newtonian polymer solutions*, J. non-Newt. Fluid Mech., 37, 1-18 (1990).



DE KEE, D. et P.J. CARREAU, *Friction factors and bubble dynamics in polymer solutions*, Can. J. Chem. Eng., 71, 183-188 (1993).

DE KEE, D., R.P. CHHABRA et D. RODRIGUE, *Hydrodynamics of free rise of bubbles in non-Newtonian polymer solutions*, Handbook of Applied Polymer Processing Technology, N.P. et P.N. Cheremisinoff Eds., M.D.I., New York, 87-123 (1996).

ELZINGA, E.R. et J.T. BANCHERO, *Some observations on the mechanics of drops in liquid-liquid systems*, AIChE J., 7, 394-399 (1961).

GEARY, N.W. et R.G. RICE, *Circulation in bubble columns: Correction for distorted bubble shape*, AIChE J., 37, 1593-1594 (1991).

GONZALEZ-TELLO, P., F. CAMACHO, E. JURADO et R. BAILON, *Influence de la concentration des agents tensio-actifs sur la vitesse terminale d'ascension des gouttes*, Can. J. Chem. Eng., 70, 426-430 (1992).

GRIFFITH, R.M., *The effect of surfactants on the terminal velocity of drops and bubbles*, Chem. Eng. Sci., 17, 1057-1070 (1962).

HAQUE, M.W., K.D.P. NIGAM, K. VISWANATHAN et J.B. JOSHI, *Studies on bubble rise velocity in bubble columns employing non-Newtonian solutions*, Chem. Eng. Commun., 73, 31-42 (1988).

HAPPEL, J. et H. BRENNER, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, 5<sup>e</sup> éd., KAP, Dordrecht (1991).

HARPER, J.F., *On bubbles with small immobile adsorbed films rising in liquids at low Reynolds numbers*, J. Fluid Mech., 58, 539-545 (1973).

- HARPER, J.F., *On spherical bubbles rising steadily in dilute surfactant solutions*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 27, 87-100 (1974).
- HARPER, J.F., *Surface activity and bubble motion*, Appl. Sci. Res., 38, 343-352 (1982).
- HE, Z., C. MALDARELLI et Z. DAGAN, *The size of stagnant caps of bulk soluble surfactant on the interfaces of translating fluid droplets*, J. Colloid Int. Sci., 146, 442-451 (1991).
- HEISS, J.F. et J. COULL, *The effect of orientation and shape on the settling velocity of non-isometric particles in a viscous medium*, Chem. Eng. Prog., 48, 133-140 (1952).
- HOLBROOK, J.A. et M.D. LeVAN, *Retardation of droplet motion by surfactant. Part 1. Theoretical development and asymptotic solutions*, Chem. Eng. Commun., 20, 191-207 (1983a).
- HOLBROOK, J.A. et M.D. LeVAN, *Retardation of droplet motion by surfactant. Part 2. Numerical solutions for exterior diffusion, surface diffusion, and adsorption kinetics*, Chem. Eng. Commun., 20, 273-290 (1983b).
- HORTON, T.J., T.R. FRITSCH et R.C. KINTNER, *Experimental determination of circulation velocities inside drops*, Can. J. Chem. Eng., 43, 143-146 (1965).
- HOTTOVY, J.D. et N.D. SYLVESTER, *Drag coefficients for irregularly shaped particles*, Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., 18, 433-436 (1979).
- HUANG, W.S. et R.C. KINTNER, *Effect of surfactants on mass transfer inside drops*, AIChE J., 15, 735-744 (1969).

KARAMANEV, D.G., *Rise of gas bubbles in quiescent liquids*, AICHE J., 40, 1418-1421 (1994).

KAWASE, Y. et J.J. ULBRECHT, *Newtonian fluid sphere with rigid or mobile interface in a shear-thinning liquid: drag and mass transfer*, Chem. Eng. Commun., 8, 213-231 (1981).

KAWASE, Y. et J.J. ULBRECHT, *The effect of surfactant on terminal velocity of and mass transfer from a fluid sphere in a non-Newtonian fluid*, Can. J. Chem. Eng., 60, 87-93 (1982).

KOPF-SILL, A.R. et G.M. HOMSY, *Bubble motion in a Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids, 31, 18-26 (1988).

LARSON, R.G., *Flow-induced mixing, demixing, and phase transitions in polymeric fluids*, Rheol. Acta, 31, 497-520 (1992).

LEAL, L.G., J. SKOOG et A. ACRIVOS, *On the motion of gas bubbles in a viscoelastic liquid*, Can. J. Chem. Eng., 49, 569-575 (1971).

LeVAN, M.D. et J.A. HOLBROOK, *Motion of a droplet containing surfactants*, J. Colloid Int. Sci., 131, 242-251 (1989).

LeVAN, M.D. et J. NEWMAN, *The effect of surfactant on the terminal and interfacial velocities of a bubble or drop*, AICHE J., 22, 695-701 (1976).

LEVICH, V.G., *Physicochemical hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1962).

METZNER, A.B., *Behavior of suspended matter in rapidly accelerating viscoelastic fluids: the Uebler effect*, AICHE J., 13, 316-318 (1967).

MILLIKEN, W.J. et L.G. LEAL, *The influence of surfactant on the deformation and breakup of a viscous drop: The effect of surfactant solubility*, J. Colloid Int. Sci., 166, 275-285 (1994).

NEWMAN, J., *Retardation of falling drops*, Chem. Eng. Sci., 22, 83-85 (1967).

OHLENDORF, D., W. INTERTHAL et H. HOFFMANN, *Surfactant systems for drag reduction: physico-chemical properties and rheological behavior*, Rheol. Acta, 25, 468-486 (1986).

PARK, N.A. et T.F. IRVINE JR., *The falling needle viscometer. A new technique for viscosity measurements*, Wärme- und Stoffübertragung, 18, 201-206 (1984).

PARK, C.W., S.R.K. MARUVADA et D.Y. YOON, *The influence of surfactant on the bubble motion in Hele-Shaw cells*, Phys. Fluids, A6, 3267-3275 (1994).

PAZWASH, H. et J.M. ROBERTSON, *Forces on Bodies in Bingham fluids*, J. Hydraulic Res., 13, 35-55 (1975).

PEDEN, J.M. et Y. LUO, *Settling velocity of variously shaped particles in drilling and fracturing fluids*, SPE Drilling Eng., 2, 337-343 (1987).

PERRY, R.H. et D. GREEN, EDS, *Perry's Chemical Engineers' Handbook*, 6<sup>e</sup> édition, Mc Graw-Hill, New York (1984).

PETTYJOHN, E.S. et E.B. CHRISTIANSEN, *Effect of particle shape on free-settling rates of isometric particles*, Chem. Eng. Prog., 44, 157-172 (1948).

QUINTANA, G.C., *The effect of surface blocking on mass transfer from a stagnant cap drop*, Int. J. Heat Mass Transfer, 33, 2631-2640 (1990).

- QUINTANA, G.C., *The effect of surfactants on flow and mass transport to drops and bubbles*, Transport Processes in Bubbles, Drops and Particles, R.P. Chhabra et D. De Kee éds., Hemisphere, N.Y., 87-113 (1992).
- QUINTANA, G.C., H.Y. CHEH et C.M. MALDARELLI, *The effect of viscoelasticity on the translation of a surfactant covered Newtonian drop*, J. Non-Newt. Fluid Mech., 45, 81-103 (1992).
- REHAGE, H., I. WUNDERLICH et H. HOFFMANN, *Shear induced phase transitions in dilute aqueous surfactant solutions*, Prog. Colloid Polym. Sci., 72, 51-59 (1986).
- REYNOLDS, P.A. et T.E.R. JONES, *An Experimental study of the settling velocities of single particles in non-Newtonian fluids*, Int. J. Mineral Proc., 25, 47-77 (1989).
- RODRIGUE, D., R.P. CHHABRA et D. DE KEE, *Drag on non-spherical particles in non-Newtonian fluids*, Can. J. Chem. Eng., 72, 588-593 (1994).
- RODRIGUE, D., D. DE KEE et C.F. CHAN MAN FONG, *The slow motion of a single gas bubble rising in a Carreau fluid containing surfactants*, soumis (1996).
- SAVIC, P., *Circulation and distortion of liquid drops falling through a viscous medium*, Nat. Res. Counc. Div. Mech. Eng., MT-22 (1953).
- SAVILLE, D.A., *The effects of interfacial tension gradients on the motion of drops and bubbles*, Chem. Eng. J., 5, 251-259 (1973).
- SADHAL, S.S. et R.E. JOHNSON, *Stokes flow past bubbles and drops partially coated with thin films. Part 1. Stagnant cap of surfactant film-exact solution*, J. Fluid Mech., 126, 237-250 (1983).

SCHECHTER, R.S. et R.W. FARLEY, *Interfacial tension gradients and droplet behavior*, Can. J. Chem. Eng., 41, 103-107 (1963).

SINGH, A.N. et K.C. ROYCHOWDHURY, *Study of the effects of orientation and shape on the settling velocity of non-isometric particles*, Chem. Eng. Sci., 24, 1185-1186 (1969).

STEBE, K.J., S.Y. LIN et C. MALDARELLI, *Remobilizing surfactant retarded fluid particle interfaces. I. Stress-free conditions at the interfaces of micellar solutions of surfactants with fast sorption kinetics*, Phys. Fluids, A3, 3-20 (1991).

STEBE, K.J. et C. MALDARELLI, *Remobilizing surfactant retarded fluid particle interfaces. II. Controlling the surface mobility at interfaces of solutions containing surface active components*, J. Colloid Int. Sci., 163, 177-189 (1994).

TORREST, R.S., *Particle settling in viscous non-Newtonian hydroxyethyl cellulose polymer solutions*, AIChE J., 29, 506-508 (1983).

UNNIKRISHNAN, A. et R.P. CHHABRA, *An experimental study of motion of cylinders in newtonian fluids: wall effects and drag coefficient*, Can. J. Chem. Eng., 69, 729-735 (1991).

VORWERK, J. et P.O. BRUNN, *Shearing effects for the flow of surfactant and polymer solutions through a packed bed of spheres*, J. non-Newt. Fluid Mech., 51, 79-95 (1994).

WALTERS, K. et R.I. TANNER, *The motion of a sphere through an elastic fluid*, Transport processes in bubbles, drops and particles, R.P. Chhabra et D. De Kee Eds, Hemisphere Publishing Corp., New York (1992).

WASSERMANN, M.L. et J.C. SLATTERY, *Creeping flow past a fluid globule when a trace of surfactant is present*, AIChE J., 15, 533-547 (1969).

WUNDERLICH, A.M. et P.O. BRUNN, *The complex rheological behavior of an aqueous cationic surfactant solution investigated in a Couette-type viscometer*, Colloid Polym. Sci., 267, 627-636 (1989).

YAMAMOTO, T. et T. ISHII, *Effect of surface active materials on the drag coefficients and shapes of single large gas bubbles*, Chem. Eng. Sci., 42, 1297-1303 (1987).

ZANA, E. et L.G. LEAL, *The dynamics and dissolution of gas bubbles in a viscoelastic fluid*, Int. J. Multiphase Flow, 4, 237-262 (1978).